فیزیک الکتریسته

تالیف:

علی اکبر مسلم زاده ولوکلائی

فن‌آوری نوین

سرشناسه	: مسلم زاده ولوکلائی، علی اکبر، ۱۳۵۳ -
عنوان و نام پدیدآور	: فیزیک الکتریسته / تالیف علی اکبر مسلم زاده ولوکلائی
مشخصات نشر	: بابل:فن‌آوری نوین، ۱۳۹۲
مشخصات ظاهری	: ۲۱٦ص.:مصور،جدول
شابک	: ۱۲۵۰۰۰ ریال:۵-۱-۹۲۲۵٤-٦۰۰-۹۷۸
وضعیت فهرست نویسی	: فیپا
یاداشت	: کتابنامه:ص.۲۱٦.
موضوع	: الکترومغناطیس- - راهنمای آموزشی(عالی)
موضوع	: الکترومغناطیس - - مسائل، تمرین‌ها و غیره(عالی)
رده بندی کنگره	: 760QC/م۵ف۹ ۱۳۹۲
رده بندی دیویی	: ۵۳۷/۰۷٦
شماره کتابشناسی ملی	: ۳۲٦٤۷۷٤

فن‌اوری نوین

www.fanavarienovin.net

بابل، کدپستی ٤۷۱٦۷-۷۳٤٤۸

تلفن: ۰۱۱۱-۲۲۵٦٦۸۷

فیزیک الکتریسته

تألیف: علی اکبر مسلم زاده ولوکلائی

نوبت چاپ: چاپ اول

سال چاپ: پاییز ۱۳۹۲

شمارگان: ۱۰۰۰ جلد

قیمت: ۱۲۵۰۰ تومان

نام چاپخانه و صحافی: فرنگاررنگ

شابک: ۵-۱-۹۲۲۵۴-۶۰۰-۹۷۸

ویراستار:

نشانی ناشر: بابل، چهارراه نواب، کاظم‌بیگی، جنب حسینیه منصور کاظم‌بیگی، طبقه همکف

طراح جلد: کانون آگهی و تبلیغات آبان (احمد فرجی)

تهران، خ اردیبهشت، نبش وحید نظری، پلاک ۱۴۲ تلفکس: ۶۶۴۰۰۲۲۰-۶۶۴۰۰۱۴۴

فهرست مطالب

مقدمه

کتابی که درحال حاضر دراختیار دارید، به عنوان درس فیزیک الکتریسیته برای دانشجویان دوره‌های کاردانی و حتی دوره‌ی کارشناسی رشته‌های فنی و مهندسی که هم‌زمان ، ریاضیات آن را نیز می‌خوانند تدوین شده است و تأکید ما نیز بر آن می‌باشد که بتوانیم از نظر ریاضیات ، دانشجویان را به پایه‌ای مناسب در زمینه اصول فیزیک کلاسیک و حل مسائل مربوط به آن برسانیم .

با توجه به این‌که منابعی که برای دانشجویان دوره‌های مختلف کاردانی ویا کارشناسی رشته‌های فنی و مهندسی معرفی می‌گردد، به گونه‌ای می‌باشند که یا سطح مطالب ارائه شده در آن‌ها ، ازسطح علمی دانشجویان بالاتر است ویا حجم آن‌ها خیلی زیاد می باشند، لذا در این کتاب ، سعی شده است مطالب درسی ، به گونه‌ای ارائه گردند که علاوه‌بر رعایت شدن سرفصل‌هایی که از طرف وزارت علوم تعیین شده است ، سادگی مطالب و پیوستگی موضوعات درسی ، به نحوی مطلوب حفظ گردد و از نظر حجم مطالب نیز آن‌چنان ناخوشایند و نگران کننده نباشد. برای این‌که مفاهیم مختلف فیزیک ، برای دانشجویان قابل درک و فهم باشد، تلاش نمودیم تا تمامی مفاهیم درسی، به صورت بسیار ساده و روان معرفی گردد ، طوری‌که علاوه بر گنجاندن بخش‌های معرفی مفاهیم و توضیحات مربوط به آن ، مثال‌های متعددی را در سرتاسر هر فصل آوردیم و در انتهای هر فصل نیز ، مسائلی جالب معرفی و حل گردید تا مطالب درسی به صورت کامل ، برای دانشجویان قابل تحلیل باشد. همچنین در انتهای هر فصل، تعدادی مسئله آورده شده که حل آنها به عهده دانشجو گذاشته شده است.

یکی از اهداف مهمی که در تألیف این کتاب ، منظور گردیده است ، آشنایی دانشجویان با مفاهیم و قوانین فیزیک کلاسیک در زمینه فیزیک الکتریسیته و مغناطیس می‌باشد که این عمل با معرفی بار الکتریکی و میدان الکتریکی در فصل‌های آغازین کتاب شروع می‌شود و درپی‌آن، در فصول بعدی با ارائه قانون گاوس و پتانسیل الکتریکی ادامه می‌یابد. سپس با معرفی خازن‌ها و مقاومت‌های الکتریکی به عنوان ادواتی که در الکتریسیته استفاده می‌شوند، مطالب را ادامه می‌دهیم و با بحث در زمینه جریان الکتریکی، مفاهیم الکتریسیته را خاتمه می‌دهیم.

در بحث فیزیک مغناطیس نیز پس از معرفی میدان مغناطیسی، به مفاهیمی در مورد قوانین آمپر و لنز و پدیده-های فیزیکی مربوط به آن می‌پردازیم و در پی آنها قانون بیو – ساوار و قانون القای فارادی را معرفی و سپس بحث القائیدگی را ارائه نمودیم. در انتها نیز در مورد خواص مغناطیسی مواد نیز مباحثی را در میان گذاشتیم.

جا دارد از خانم میترا حبیب زاده که ما را در تایپ، صفحه آرایی و ویراستاری این کتاب یاری نموده، تشکر نماییم.

در پایان از تمامی خوانندگان عزیز (اساتید و دانشجویان) تقاضا داریم، هرگونه اشکال، ابهام در متن کتاب، پیشنهادات و انتقادات را به آدرس پست الکترونیک fanavarienovin@gmail.com ارسال نمایند.

بابل، پاییز ۱۳۹۲

مؤلف

کتاب‌های منتشر شده انتشارات فن‌آوری نوین	
ردیف	**نام کتاب**
۱	حل مسائل C (مرجع کامل)
۲	حل مسائل C++ (مرجع کامل)
۳	آموزش گام به گام برنامه نویسی بانک اطلاعات با C# (مرجع کامل)
٤	حل مسائل C# (مرجع کامل)
٥	حل مسائل پاسکال (مرجع کامل)
٦	آموزش گام به گام برنامه نویسی بانک اطلاعات با ویژوال بیسیک‌نت (مرجع کامل)
۷	آموزش گام به گام LINQ با C#
۸	تجارت الکترونیکی
۹	امنیت شبکه
۱۰	اصول طراحی پایگاه‌داده
۱۱	طراحی سیستم‌های شی‌گرا با زبان C#
۱۲	مدیریت استراتیژیک (فن آوری اطلاعات)
۱۳	کاربرد رایانه در مدیریت و حسابداری
۱٤	آموزش گام به گام برنامه نویسی به زبان C++
۱٥	سنجش از دور کاربردی جلد اول
۱٦	گرافیک رایانه‌ای با زبانبرنامه نویسی C#
۱۷	آزمایشگاه پایگاه داده با SQL Server 2012
۱۸	فیزیک الکتریسته
۱۹	ساختمان داده‌ها

فصل ۱ بردارها

مقدمه

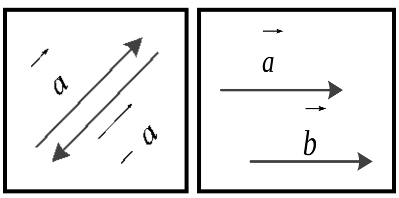
می‌دانیم که در فیزیک ،کمیت‌ها به دو دسته: کمیت‌های نرده‌ی و کمیت‌های برداری تقسیم مـی‌شـوند کـه کمیت‌های نرده‌ای فقط دارای انـدازه مـی‌باشـند و کمیـت‌هـای بـرداری ، عـلاوه بـر انـدازه ، دارای جهـت نیـز می‌باشند. برای توصیف کمیت‌های برداری ، به زبان ریاضی خاصی به نام « زبان بردارها » نیاز داریم . این زبـان برداری نه تنها در علوم مهندسی و علوم دیگر کاربرد دارد، بلکه در زبان عامیانه نیز به کار مـی‌رود. مـثلاً وقتـی آدرسی را به این صورت به کسی می‌دهید- تعداد دو چهارراه پـایین‌تر، خیابـان سـمت راسـت، سـومین کوچـه سمت چپ- از زبان بردارها استفاده نموده‌اید. در واقع هر نوع جهت شناسی، بر اصول بردارها مبتنی خواهد بود که در علوم فیزیک و مهندسی، برای شناخت و تحلیل پدیـده‌های مختلـف، از اصـول و روش‌هـای ویـژه‌ای از بردارها، استفاده می کنند که به آنالیز برداری موسوم است. در این فصل بـه مفـاهیم اولیـه بردارهـا و جبـر سـاده برداری می‌پردازیم.

۱-۱. نمایش بردار

برای نشان دادن یک بردار از یک خط راست و یک پیکان در نقطه انتهایی استفاده می‌شود. طول این خـط راست، متناسب با مقدار کمیت مورد بحث و جهت آن، جهت کمیت مذکور می‌باشـد. بـرای علامـت گـذاری یک کمیت برداری، روش واحدی وجود ندارد و معمولاً از حروف کوچک انگلیسـی کـه بـالای آن علامـت بردار قرار دارد، استفاده می کنند و یا از حروف انگلیسی بزرگ به عنـوان نقـاط شـروع و پایـانی بـردار بـا یـک علامت بردار روی این دو حرف استفاده می‌کنند، یعنی به صورت $\vec{a}$ یا $\overrightarrow{AB}$ که نقطه A نقطه شروع و نقطه B نقطه مقصد کمیت می‌باشد.

اگر روی حرف کوچک انگلیسی و یا دو حرف بزرگ انگلیسی، علامت بردار نباشد و یا این علامت‌ها در داخل قدر مطلق قرار داشته باشند (یعنی به صورت a یا $|\vec{a}|$ و یا AB و یا $|\overrightarrow{AB}|$ باشد) منظور، انـدازه بـردار می‌باشد. مثلاً اگر اندازه بردار $\vec{a}$ برابـر $4Km$ باشـد، مـی‌تـوان چنـین گفـت: $\vec{a}=4Km$ ولـی $|\vec{a}|=a=4Km$ بـی معنـی خواهد بود، زیـرا در سـمت چـپ، یـک کمیـت بـرداری و در سمت راست، یک کمیت نرده‌ای وجود دارد.

برای نمایش قرینه‌ی یک بردار، کافی است که جهت آن بردار عوض شود که در شکل ۱-۱ الف نمایش داده شده است.



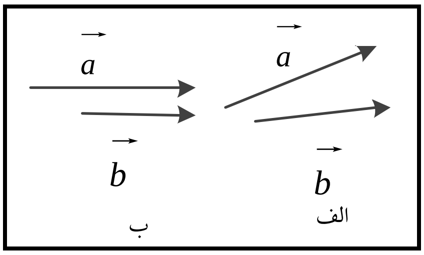
الف ب

شکل ۱-۱. دو بردار الف: قرینه و ب: مساوی هم.

همچنین دو بردار، وقتی با هم مساوی می‌باشند که

دارای اندازه و جهت مساوی هم باشند البته می‌بایست واحدهای آن‌ها نیز یکی باشد. بنابراین دو بردار مساوی، موازی هم نیزخواهند بود و جهت آن‌ها یکسان می‌باشد. (شکل ۱-۱ – ب).

ممکن است دو بردار دارای اندازه‌های برابر باشند ولی جهت آن‌ها یکسان نباشد (شکل ۲-۱ الف) و نیز ممکن است دو بردار دارای جهت‌های یکسان باشد ولی اندازه‌هایشان برابر نباشد (شکل ۲-۱- ب). در این حالات، این دو بردار با هم برابر نمی‌باشند.

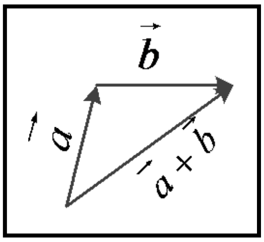


شکل ۱-۲. بردارهای نامساوی با هم. در شکل الف بردارهای a و b اندازه‌های یکسان و جهت‌های مختلف دارند و در شکل ب جهت بردارها یکسان و اندازه آن‌ها متفاوت می‌باشد.

۲-۱. قوانین جمع بردارها

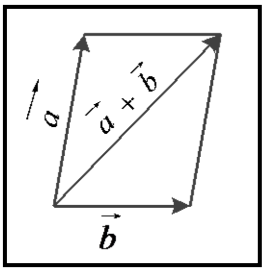
معمولاً برای جمع بردارها، هم می‌توانیم از روش هندسی استفاده کنیم و هم از روش جبری. برای ترکیب دو یا چند بردار، ابتدا روش‌های هندسی را ارائه می‌دهیم و سپس با معرفی جبر برداری، به ترکیب بردارها با استفاده از جبر برداری می‌پردازیم.

اولین روش هندسی برای ترکیب بردارها، روش مثلثی است. در این روش اگر دو بردار a و b در اختیار باشد، برای به دست آوردن مجموع این دو بردار که آن‌را با $a+b$ نمایش می‌دهیم، ابتدا بردار b را از انتهای بردار a رسم می‌کنیم و پس از آن، ابتدای بردار a را به انتهای بردار b رسم می‌کنیم. این بردار حاصل، بردار $a+b$ خواهد بود.در شکل ۳-۱ این روش، نمایش داده شده است. از آن جایی که در این روش، سه بردار رسم شده، تشکیل یک مثلث را می‌دهند، به این روش، روش مثلثی گفته می‌شود.



شکل ۳-۱. جمع بردارهای a و b به روش مثلثی.

روش دیگری هم برای جمع دو بردار وجود دارد که روش متوازی‌الاضلاع نام دارد.در روش متوازی‌الاضلاع دوبردار a و b از یک نقطه مشترک رسم می‌شوند. با ساختن متوازی‌الاضلاعی که اضلاع آن بردارهای a و b می‌باشند، قطر این متوازی‌الاضلاع (همان‌طور که در شکل ۴-۱ نیز نشان داده شده است) بردار $a+b$ خواهد بود.



شکل ۴-۱. جمع بردارهای a و b به روش متوازی‌الاضلاع.

تنها نکته قابل ذکر این است که در تفریق برداری $a-b$ ، کافی است که بردار b- را با بردار a جمع کنیم.بدین صورت که:

$$a - b = a + (-b) \tag{۱-۱}$$

تا این مرحله از بحث، روش‌های هندسی جمع بردارها را معرفی نمودیم. حال با استفاده از روش‌هایی که آموختیم می‌خواهیم خواص جمع بردارها را بحث کنیم. این خواص عبارتند از:

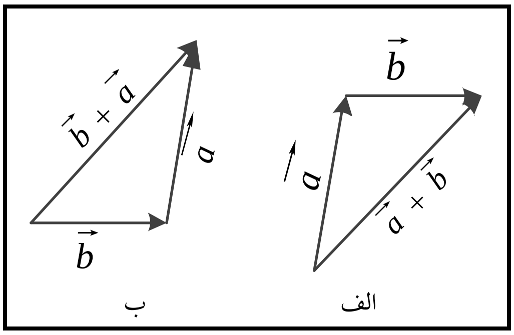
الف. خاصیت جابه‌جایی: در جمع دو یا چند بردار، اگر جای دو بردار را عوض کنیم، تغییری در حاصل، به وجود نمی‌آید. به عبارت ریاضی:

$$a + b = b + a \qquad (۱-۲)$$

این خاصیت را با استفاده از روش مثلثی و متوازی‌الاضلاع، به سادگی می‌توان تحقیق کرد. در شکل ۵-۱ این خاصیت اثبات شده است.

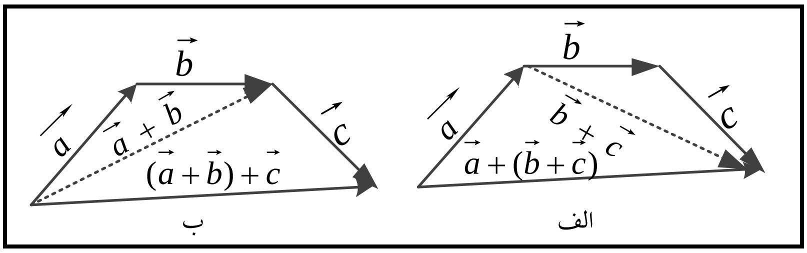
ب. خاصیت شرکت پذیری (انجمنی): این قضیه به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$a + (b + c) = (a + b) + c \qquad (۱-۳)$$



شکل ۵-۱. در شکل الف حاصل $a+b$ و در شکل ب حاصل $b+a$ رسم شده است. کاملاً پیداست که این دو روش، خاصیت جابه‌جایی را تصدیق می‌کند.

برای اثبات این قضیه، ابتدا برای سمت چپ رابطه، کافی است که دو بردار b و c را با هم جمع سپس و حاصل این عبارت را با بردار a جمع می‌کنیم. (شکل ۶-۱- الف) برای سمت راست نیز، ابتدا دوبردار a و b را با هم جمع کرده و حاصل این عبارت را با بردار c جمع می‌کنیم. .(شکل ۶-۱- ب)



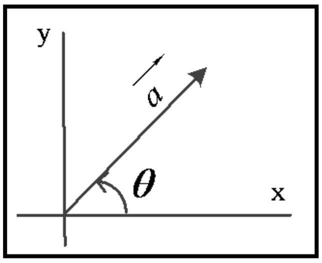
شکل ۶-۱. در شکل الف بردار $a + (b + c)$ و در شکل ب بردار $(a + b) + c$ نمایش داده شده است.

۳-۱. تألیف (تجزیه) یک بردار

با توجه به آن‌چه تاکنون گفته شد، جهت یک بردار، با علامت پیکان مشخص می‌شود. اگر بخواهیم یک بردار را با این روش، برای شخصی معین نماییم، تنها راه این است که بردار را به او نشان دهیم و همان‌طور که می‌دانیم، این امکان همیشه وجود ندارد که بتوانیم دقیقاً جهت بردار را با این روش نشان دهیم.

یک روش مفید برای نشان دادن جهت یک بردار، استفاده از زاویه می‌باشد؛ شبیه به آن‌چه که در جغرافیا مرسوم می‌باشد. در جغرافیا، صفحه را به چهار جهت اصلی شمال، جنوب، شرق و غرب تقسیم می‌کنند و هر نقطه را با سمت گیری آن نقطه در این چهار جهت نشان می‌دهند.

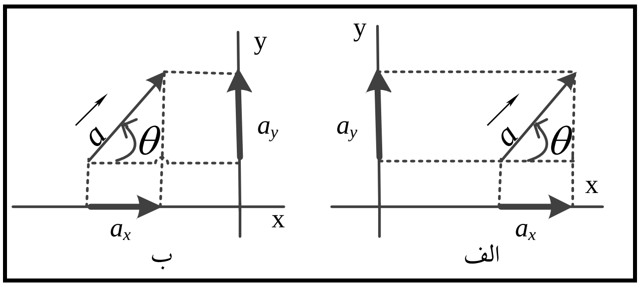
روش بیان جهت یک بردار، به این ترتیب می‌باشد که در صفحه، دو محور عمود بر هم را در نظر می‌گیرند (محورهای مختصات x و y) و جهت هر بردار را با تعیین زاویه‌ای که بردار با یکی از محورها می‌سازد، مشخص می‌کنند، یعنی ابتدا بردار مورد نظر را از مبدأ مختصات رسم نموده و سپس زاویه‌ی این بردار را نسبت به محورهای مذکور، تعیین می‌کنند.(شکل ۷-۱)



شکل ۷-۱ رسم یک بردار در دستگاه مختصات

زاویه‌ای که هر بردار با محورهای مختصات می‌سازد را با اندازه‌ی زاویه‌ای که جهت پادساعتگرد با محورهای مختصات دارد، در نظر می‌گیرند. مثلاً در شکل ۷-۱ زاویه‌ای که بردار a با محور x می‌سازد θ می‌باشد. حال می‌خواهیم در مورد اندازه هر بردار روی محورهای مختصاتی بحث کنیم. اگر از ابتدا و انتهای برداری که در دستگاه مختصات رسم شده است، خطی عمود بر محور مختصات رسم شود، اندازه بین نقاط ابتدایی و انتهایی بردار، مؤلفه بردار مورد نظر روی آن محور مختصات خواهد بود.

مؤلفه‌های یک بردار، تصویر آن بردار روی محورهای مختصات می‌باشد. به طور نمونه در شکل ۱- ۸، a_x مؤلفه بردار a در راستای محور x و همچنین a_y مؤلفه بردار a در راستای محور y می‌باشد.



شکل ۸-۱ . الف) مؤلفه‌های بردار a در محورهای x و y. ب) اگر این بردار در دستگاه مختصات جابه‌جا شود، مادامی که اندازه و جهت آن تغییر نکند، مؤلفه‌های آن در این دستگاه مختصات، تغییر نمی‌کند.

در شکل ۸-۱ اگر کمی دقت کنید، می‌توانید نتیجه بگیرید که اندازه مؤلفه بردار a در راستای محورهای x و y به صورت زیر خواهد بود:

$$Cos\theta = a_x / a \qquad \text{و} \qquad Sin\theta = a_y / a$$

و با این دو رابطه، می‌توان روابط زیر را نتیجه گرفت:

$$a_x = a\ Cos\theta \quad \text{و} \quad a_y = a\ Sin\theta \qquad (۱-۴)$$

در این رابطه‌ها، θ زاویه‌ای است که بردار a با محور x می‌سازد. همچنین قابل ذکر است که اگر برداری به مؤلفه‌هایش روی محورهای مختصاتی تجزیه شود، با این مؤلفه‌ها نیز می‌بایست به صورت برداری رفتار نمود.

حال اگر مؤلفه‌های یک بردار را داشته باشیم، می‌توانیم برای تبدیل این مؤلفه‌ها به بردار اصلی، از روابط زیر استفاده کنیم تا بردار اصلی و زاویه آن با محور xها را محاسبه کنیم:

$$a = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2}} \qquad \text{و} \qquad \theta = \tan^{-1}\left(a_y / a_x\right) \qquad (۱–۵)$$

مثال۱ – ۱. مؤلفه‌های بردار a که اندازه آن 5 واحد و زاویه آن نسبت به محور yها $30°$ می‌باشد را محاسبه کنید.

حل: چون این بردار با محور yها زاویه $30°$ می‌سازد، پس با محور xها، زاویه $60°$ می‌سازد و لذا:

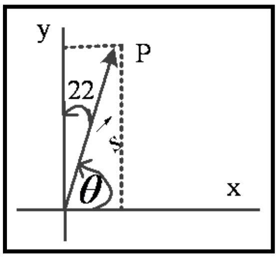
$$a_y = a\ Sin60 = 5\times(\sqrt{3}/2) = 4.33 \qquad \text{و} \qquad a_x = a\ Cos60 = 5\times(1/2) = 2.5$$

مثال۲ – ۱. فرض کنید در یک روز بارانی، هواپیمایی فرودگاه را ترک می‌کند و ۲۱۵ کیلومتر دورتر در جهتی که با خط شمال، زاویه‌ای ۲۲ درجه‌ای می‌سازد، دیده می‌شود. هواپیمای فوق در چه فاصله‌ای از شرق و شمال فرودگاه قرار دارد؟

همان‌طور که در شکل ۱-۹ نشان داده شده است، زاویه بردار S یعنی برداری که فاصله تا فرودگاه را نشان می‌دهد با محور x ها زاویه $\theta = 90° - 22° = 68°$ می‌باشد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت:

$$S_y = S\ Sin68° = 199\,Km \quad \text{و} \quad S_x = S\ Cos68° = 81Km$$

نکته‌ای بسیار مهم را که باید یادآوری کنیم این است که برای به دست آوردن زاویه میان بردار و محور x که آن‌را θ نامیدیم و با رابطه (۱–۵) معرفی کردیم باید به علامت مقادیر a_x و a_y نیز توجه نمود.



شکل۱-۱. هواپیما از فرودگاه حرکت و به نقطه P می‌رسد

از روی علامت مؤلفه‌های یک بردار و با استفاده از جدول ۱-۱ می‌توان ناحیه‌ای که θ در آن ناحیه قرار دارد را شناسایی نمود. سپس مقدار θ را با راهنمایی‌های ذیل شناخت:

- ☒ برای محاسبه زاویه θ، ابتدا رابطه (۱–۵) یعنی $\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{a_y}{a_x}\right|$ را محاسبه می‌کنیم.
- ☒ با توجه به جدول (۱–۱)، اگر θ را در ناحیه اول باشد، θ = α خواهد بود.
- ☒ اگر θ در ناحیه دوم باشد، θ = 180 - α زاویه بردار مورد بحث با محور x ها خواهد بود.
- ☒ اگر θ در ناحیه سوم قرار داشته باشد، θ = 180 + α جواب مورد نظرمان خواهد بود.
- ☒ و بالاخره اگر در ناحیه چهارم باشد، θ = – α جواب مورد نظرمان خواهد بود.

جدول ۱-۱ علامت مؤلفه‌های یک بردار در ناحیه‌های چهارگانه دستگاه مختصات

ناحیه‌ای که θ در آن قرار دارد	علامت a_x	علامت a_y
اول	+	+
دوم	–	+
سوم	–	–
چهارم	+	–

مثال۳ – ۱. اگر مؤلفه‌های یک بردار به صورت $a_y = 40P$ و نیز $a_x = 30P$ باشند، بردار a را در حالت‌های الف) p = 1 و q = 1 ب) p = –1 و q = 1 و ج) p = –1 و q = –1 و د) p = 1 و q = –1 محاسبه کنید.

حل: الف) در این حالت چون $a_x = 30$ و $a_y = 40$ می‌باشد لذا بردار a در ناحیه اول می‌باشد و لذا:

$$a = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2}} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \qquad \text{و} \qquad \theta = \tan^{-1}\left(40/(-30)\right) = 53°$$

و چون در ناحیه اول است، پس $\theta = \alpha = 53^\circ$ می‌باشد.

ب) در این حالت چون $a_x = -30$ و $a_y = 40$ می‌باشد. لذا بردار a در ناحیه دوم می‌باشد و لذا:

$$a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2} = \sqrt{(-30)^2 + 40^2} = 50 \qquad \text{و} \qquad \theta = \tan^{-1}\left(40/30\right) = 53^\circ$$

و چون در ناحیه دوم است، پس $\theta = 180 - 53 = 127^\circ$ می‌باشد.

ج) در این حالت نیز به دلیل این که $a_x = -30$ و $a_y = -40$ می‌باشد. لذا بردار a در ناحیه سوم واقع می‌شود و لذا:

$$a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2} = \sqrt{(-30)^2 + (-40)^2} = 50 \qquad \text{و} \qquad \theta = \tan^{-1}\left((-40)/(-30)\right) = 53^\circ$$

و از آن جایی که a در ناحیه سوم است، پس $\theta = 180 + 53 = 233^\circ$ می‌باشد.

د) در این حالت نیز به دلیل این که $a_x = 30$ و $a_y = -40$ می‌باشد لذا بردار a در ناحیه چهارم واقع می‌شود و لذا:

$$a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2} = \sqrt{30^2 + (-40)^2} = 50 \qquad \text{و} \qquad \theta = \tan^{-1}\left((-40)/30\right) = 53^\circ$$

و از آن جایی که a در ناحیه چهارم است، پس $\theta = -53^\circ$ می‌باشد.

۴-۱. جمع بردارها از طریق مؤلفه‌ها

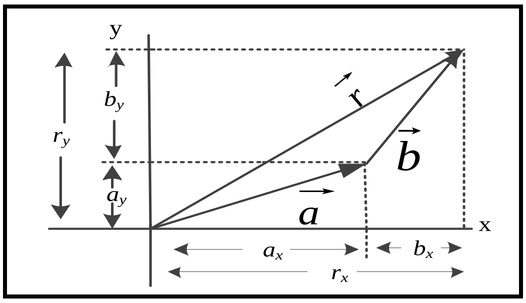
اگر بردار r، برآیند (مجموع) دو بردار a و b باشد، لذا:

$$r = a + b \qquad (۶-۱)$$

این سه بردار را در دستگاه مختصات همانند شکل ۱۰-۱ رسم می‌کنیم.همان‌گونه که در شکل مشاهده شده است، رابطه زیر بین مؤلفه‌های این سه بردار و برقرار می‌باشد:

$$r_x = a_x + b_x \qquad \text{و} \qquad r_y = a_y + b_y \qquad (۷-۱)$$

بنا بر روابط (۱-۷) ، برای به دست آوردن مجموع دو بردار، ابتدا هر بردار را می‌توان به مؤلفه‌هایش تجزیه نمود و سپس مجموع مؤلفه‌های این بردار را روی هر محور مساوی با مؤلفه بردار برآیند روی همان بردار در نظر گرفت. با داشتن مؤلفه‌های بردار برآیند و با استفاده از روابط (۱-۵)، اندازه و جهت بردار برآیند به سادگی قابل شناخت خواهد بود. این روش که شاید ساده‌ترین روش جمع بردارها می‌باشد، جمع بردارها از طریق مؤلفه‌ها نامیده می‌شود.



شکل ۱۰-۱. رابطه میان جمع دو بردار و مؤلفه‌های آن‌ها

مثال ۴ – ۱. اندازه بردار a برابر برابر 4 واحد و اندازه بردار b، معادل 6 واحد می‌باشد. زاویه‌ای که بردار a با محور x می‌سازد 60° و زاویه‌ای که بردار b با این محور می‌سازد 30° می‌باشد. مجموع دو بردار a و b و جهت آن‌را محاسبه نمایید.

حل: با استفاده از رابطه مؤلفه‌ها یعنی (۱-۴) ، ابتدا مؤلفه‌های بردارها را محاسبه می‌کنیم:

$$a_y = a\ Sin60 = 4(\sqrt{3}/2) = 3.4 \quad \text{و} \quad a_x = a\ Cos60 = 4(1/2) = 2$$

$$b_y = b\ Sin30 = 6(1/2) = 3 \quad \text{و} \quad b_x = b\ Cos30 = 6(\sqrt{3}/2) = 5.1$$

حال با استفاده از رابطه‌های (۱-۷)، مؤلفه‌های بردار برآیند را حساب می‌کنیم:

$$r_x = a_x + b_x = 2 + 5.1 = 7.1 \quad \text{و} \quad r_y = a_y + b_y = 3.4 + 3 = 6.4$$

و بالاخره با استفاده از رابطه (۱-۵)، اندازه بردار برآیند و جهت آن‌را به دست می‌آوریم:

$$\theta = \tan^{-1}(r_y / r_x) = \tan^{-1}(6.4/7.1) = 42° \quad \text{و} \quad r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = \sqrt{(7.1)^2 + (6.4)^2} = 9.56$$

۱-۵. محاسبه اندازه مجموع دو بردار

اگر دو بردار a و b را بخواهیم جمع کنیم، در صورت داشتن اندازه بردارهای a و b و دانستن زاویه بین آن‌ها، بزرگی (اندازه) بردار $a+b$ را می‌توانیم محاسبه کنیم. به این ترتیب که اگر $|a|$ بزرگی بردار a و همچنین $|b|$ بزرگی بردار b باشد و البته θ زاویه میان بردارهای a و b باشد: $r = a + b$

$$|r|^2 = |a+b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|Cos\theta \qquad (۱-۸)$$

همچنین برای تفاضل دو بردار نیز چنین داریم: $s = a - b$

$$|s|^2 = |a-b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|Cos\theta \qquad (۱-۹)$$

لازم به ذکر است که رابطه‌های (۱-۸) و (۱-۹)، فقط اندازه بردارهای r و s را به ما می‌دهند و در مورد جهت بردار برآیند، اطلاعاتی را در اختیار ما قرار نمی‌دهند.

مثال۵ - ۱. هرگاه دو بردار به بزرگی‌های *8* واحد و*6* واحد با هم ترکیب شوند، در چه صورت می‌توان از ترکیب آن‌ها، برداری به اندازه الف) *14*واحد و ب) *2* واحد و ج) *10* واحد داشته باشیم؟

حل: الف) با استفاده از رابطه (۱-۸) چنین داریم:

$$14^2 = 8^2 + 6^2 + 2\ (8)\ (6)\ Cos\ \theta = 100 + 96\ Cos\theta$$

با کمی ساده‌سازی ارقام، کاملاً پیداست که: $Cos\theta = 1$ و یا: $\theta = 0°$.یعنی اگر این دو بردار در جهت هم با همدیگر ترکیب (جمع) شوند، بردار برآیند، 14 واحدی خواهد بود.

ب) باز هم با استفاده از رابطه (۱-۸) خواهیم داشت:

$$2^2 = 8^2 + 6^2 + 2\ (8)\ (6)\ Cos\ \theta = 100 + 96\ Cos\ \theta$$

با محاسباتی ساده خواهیم داشت که: $Cos\theta = -1$ و $\theta = 180°$.یعنی اگر بردار *8* واحدی در جهت مثبت و بردار۶ واحدی در جهت منفی باشد، بردار برآیند، *2* واحدی خواهد بود.

ج) در این قسمت نیز ابتدا از رابطه (۱-۸) استفاده می‌کنیم:

$$10^2 = 8^2 + 6^2 + 2\ (8)\ (6)\ Cos\ \theta = 100 + 96\ Cos\theta$$

که با ساده کردن اعداد، $Cos\theta = 0$ به دست می‌آید و لذا $\theta = 90°$. بنابراین اگر بردار 8 واحدی و 6 واحدی عمود بر هم باشند، اندازه بردار برآیند آن‌ها، 10 واحد طول خواهد داشت.

۱-۶. بردارهای یکه

بردارهایی که تاکنون بحث نمودیم، دارای اندازه و جهت مختلف بودند. در پی آن هستیم که بردارهای یکه را معرفی کنیم که این بردارها، برداری هستند که بزرگی (اندازه) آن‌ها، برابر با واحد (یک) و جهت آن، سوی مثبت یکی از محورهای مختصات می‌باشد. بردارهای یکه، بُعد و یکا (واحد) ندارند و تنها برای مشخص نمودن جهت محورهای مختصات مربوط به خود، استفاده می‌شوند.

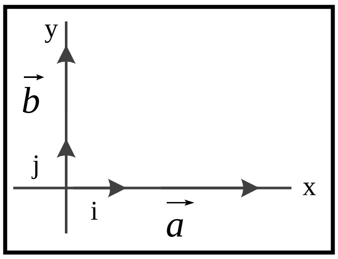
در دستگاه مختصات دکارتی، بردار یکه در جهت محورxرا با $\hat{i}$ و در جهت محورyرا با $\hat{j}$ نمایش می‌دهند. همچنین بردار یکه در جهت محورz را با $\hat{k}$ نمایش می‌دهند. بر طبق قرارداد علامت « ^ » روی حروف i و j و k، بیان‌گر این موضوع می‌باشد که این بردارها، بردارهای یکه می‌باشند.

شکل ۱۱-۱ را در نظر بگیرید. در این شکل، می‌توان ادعا نمود که: $a = |a|\hat{i}$ و نیز $b = |b|\hat{j}$. حال اگر بردار r را برآیند این دو بردار در نظر بگیریم، می‌توان رابطه‌ای به صورت زیر را مطرح نمود:

$$r = a + b = |a|\hat{i} + |b|\hat{j}$$

همچنین می‌توان با استفاده از تعریف $r_x = |a|$ و $r_y = |b|$، نتیجه گرفت:

$$r = r_x\hat{i} + r_y\hat{j} \qquad (۱-۱۰)$$



شکل ۱۱-۱. دو بردارaوbروی محورهای مختصات

این رابطه، یک رابطه کلی است که برای هر بردار دلخواهی، برقرار است.

مثال۶-۱. سه بردارa و b و c را به صورت‌های $a = 4\hat{i} - \hat{j}$ و $b = -3\hat{i} + 2\hat{j}$ و $c = -3\hat{j}$ در نظر بگیرید. برآیند این سه بردار را محاسبه کنید.

حل: برآیند این سه بردار، به صورت می‌باشد، یعنی:

$$r = (4\hat{i} - \hat{j}) + (-3\hat{i} + 2\hat{j}) + (-3j) = (4\hat{i} - 3\hat{i}) + (-\hat{j} + 2\hat{j} - 3\hat{j}) = \hat{i} - 2\hat{j}$$

حال باید اندازه و زاویه این بردار برآیند را محاسبه کنیم:

$$r = \sqrt{{r_x}^2 + {r_y}^2} = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} \qquad \text{و} \qquad \theta = \tan^{-1}(r_y / r_x) = \tan^{-1}(-2/1) = 63°$$

و چون r_x و r_y به گونه‌ای است که r در ناحیه چهارم قرار می‌گیرد، بنابراین $\theta = -63°$ خواهد بود.

نکته قابل ذکر این است که اگر بخواهیم بردار را در سه بعد تعریف کنیم، به این صورت عمل می‌کنیم:

$$r = r_x\hat{i} + r_y\hat{j} + r_z\hat{k} \qquad \text{و} \qquad |r| = \sqrt{{r_x}^2 + {r_y}^2 + {r_z}^2} \qquad (۱-۱۱)$$

این رابطه اخیر، شکل کلی نمایش یک بردار بر حسب مؤلفه‌هایش می‌باشد.

۱-۷. ضرب بردارها

می‌توان گفت که ضرب بردارها به سه گونه می‌باشد. دسته اول، ضرب یک کمیت اسکالر یا عدد، در یک بردار است. دو دسته بعدی، ضرب دو بردار در هم می‌باشد. این روش‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱–۷–۱. ضرب یک کمیت نرده‌ای در یک بردار

اگر یک کمیت نرده‌ای یا یک عدد را بخواهید در یک بردار ضرب کنید، بردار جدیدی حاصل می‌شود که در راستای بردار اولیه می‌باشد و اندازه آن نیز در کمیت نرده‌ای یا عدد آن ضرب می‌شود لیکن جهت بردار نهایی به گونه‌ای است که اگر کمیت نرده‌ای یا عدد آن، مثبت باشد، بردار نهایی در جهت بردار اولیه است و اگر آن کمیت نرده‌ای یا آن عدد، منفی باشد، جهت بردار حاصل، در خلاف جهت بردار اولیه است.

مثال۷–۱. بردار $a=\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ را در نظر بگیرید. بردارهای الف) $b=2a$ و ب) $c=-3a$ را محاسبه کنید.

حل: بردار $b=2a$ به صورت زیر خواهد بود:

$$b=2a=2(\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})=2\hat{i}+4\hat{j}-2\hat{k}$$

اگر با استفاده از رابطه (۱–۱۱) بزرگی بردارهای a و b را محاسبه کنیم، آن گاه:

$$|a|=\sqrt{(1)^2+(2)^2+(-1)^2}=\sqrt{6} \quad \text{و} \quad |b|=\sqrt{(2)^2+(4)^2+(-2)^2}=2\sqrt{6}$$

یعنی طول بردار b، دو برابر طول بردار a می‌باشد.

ب) بردار $c=-3a$ نیز به این صورت می‌باشد: $c=-3a=-3(\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})=-3\hat{i}-6\hat{j}+3\hat{k}$

و اگر بخواهیم اندازه بردار c را محاسبه کنیم:

$$|c|=\sqrt{(-3)^2+(-6)^2+(3)^2}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$$

کاملاً واضح است که طول بردار c سه برابر طول بردار a بوده ولی جهت آن در خلاف جهت بردار a می‌باشد.

۲–۷–۱. ضرب نرده‌ای (داخلی یا نقطه‌ای) دو بردار

اگر دو بردار a و b که با هم زاویه θ می‌سازند در هم ضرب نقطه‌ای گردند، حاصل آن را به صورت :

$$a\cdot b=|a|\ |b|\ Cos\theta \qquad (۱–۱۲)$$

تعریف می‌کنیم. از آنجایی که طرف راست رابطه فوق خاصیت جابه‌جایی دارد، پس سمت چپ نیز خاصیت جابه‌جایی خواهد داشت و لذا می‌توان ادعا نمود که ضرب نقطه‌ای دو بردار، خاصیت جابه‌جایی دارد.

در این مرحله از بحث در نظر داریم ضرب نقطه‌ای (داخلی) دو بردار را از نظر مؤلفه‌ای محاسبه کنیم.برای این منظور، دو بردار $a=a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k}$ و $b=b_x\hat{i}+b_y\hat{j}+b_z\hat{k}$ را در نظر می‌گیریم. در دستگاه مختصات، می‌توان نتیجه‌گیری نمود که:

$$\hat{i}\cdot\hat{i}=\hat{j}\cdot\hat{j}=\hat{k}\cdot\hat{k}=(1)\ (1)\ Cos0=1 \quad \text{و} \quad \hat{i}\cdot\hat{j}=\hat{i}\cdot\hat{k}=\hat{j}\cdot\hat{k}=(1)\ (1)\ Cos90=0$$

بنابراین، برای ضرب نقطه‌ای دو بردار a و b، این نتیجه‌گیری میسر می‌باشد:

$$\begin{aligned}a\cdot b&=(a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k})\cdot(b_x\hat{i}+b_y\hat{j}+b_z\hat{k})=\\&=a_xb_x\hat{i}\cdot\hat{i}+a_xb_y\hat{i}\cdot\hat{j}+a_xb_z\hat{i}\cdot\hat{k}+a_yb_x\hat{j}\cdot\hat{i}+a_yb_y\hat{j}\cdot\hat{j}\\&\quad+a_yb_z\hat{j}\cdot\hat{k}+a_zb_x\hat{k}\cdot\hat{i}+a_zb_y\hat{k}\cdot\hat{j}+a_zb_z\hat{k}\cdot\hat{k}\end{aligned}$$

اگر مقادیر ضرب نقطه‌ای بردارهای یکه را جاگذاری کنیم، خواهیم داشت:

$$a\cdot b=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z \qquad (۱–۱۳)$$

این رابطه، ضرب نقطه‌ای دو بردار را توسط مؤلفه‌های دو بردار، معرفی می کند.

مثال۸-۱. بردارهای $a = 2\hat{i} - 3\hat{j}$ و $b = \hat{i} + 2\hat{k}$ را در نظر بگیرید. مقدار عبارت $a \cdot b$ را محاسبه نمایید.

حل: با استفاده از رابطه (۱-۱۳) داریم: $a \cdot b = (2)(1) + (-3)(0) + (0)(2) = 2$

مثال۹-۱. زاویه میان دو بردار $a = 3\hat{i} - 4\hat{j}$ و $b = -2\hat{i} + 3\hat{k}$ را محاسبه کنید.

حل: می‌دانیم که ضرب نقطه‌ای دو بردار a و b با استفاده از رابطه (۱-۱۳) به صورت زیر می‌باشد:

$$a \cdot b = (3)(-2) + (-4)(0) + (0)(3) = -6$$

همچنین ضرب نقطه‌ای این بردارها با استفاده از رابطه (۱-۱۲) به صورت زیر خواهد بود:

$$a \cdot b = |a|\ |b|\ Cos\theta = (\sqrt{(3)^2 + (-4)^2})(\sqrt{(-2)^2 + (3)^2})Cos\theta =$$

$$= (5)(3.61)Cos\theta = 18.05Cos\theta$$

این دو مقدار به دست آمده برای ضرب نقطه‌ای، بردارهای و باید با هم برابر باشند؛ یعنی:

$$-6 = 18.05Cos\theta$$

و یا نتیجه می‌شود: $Cos\theta = \dfrac{-6}{18.05} = -0.33$ که این رابطه، به این معناست که :

$$\theta = Cos^{-1}(-0.33) = 109°$$

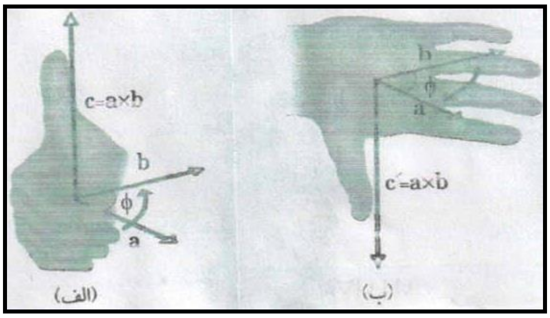
۳-۷-۱. ضرب برداری (خارجی) دو بردار

اگر زاویه‌ای که دو بردار a و b می‌سازند را با θ نمایش دهیم و بخواهیم حاصل ضرب برداری میان این دو بردار را محاسبه کنیم، آن گاه:

$$|a \times b| = |a|\ |b|\ Sin\theta \qquad (۱-۱۴)$$

می‌باشد. البته قابل ذکر است که ضرب برداری دو بردار، یک بردار را نتیجه می‌دهد. اگر $c = a \times b$ تعریف شود، آن گاه جهت بردار c عمود بر صفحه‌ای است که شامل بردارهای a و b می‌باشد (شکل ۱۲-۱).

چگونگی تعیین جهت بردار c را که معمولاً به قاعده دست راست موسوم است، نشان می‌دهند. در روش قاعده دست راست، بردارهای a و b را از یک نقطه رسم می کنیم. اگر سوی چرخش انگشتان دست راست از بردار a به سمت بردار b باشد، انگشت شست در جهت بردار c خواهد بود.



شکل ۱۲-۱. توضیح تصویری قاعده دست راست برای ضرب خارجی دو بردار.الف) چرخش بردار a به سمت بردار b با انگشتان دست راست که انگشت شست، جهت بردار را نشان می‌دهد. ب) نمایش این که بردار $b \times a$ در جهت مخالف بردار $a \times b$ می‌باشد.

خاطرنشان می‌شود که در ضرب برداری، ترتیب بردارها مهم می‌باشد، طوری که حاصل $b \times a$ ، جهتی در خلاف جهت بردار $a \times b$ خواهد داشت. به عبارت دیگر، چون:

$$a \times b = - \ a \times b \qquad (۱۵-۱)$$

می‌باشد، لذا قانون جابه‌جایی برای ضرب برداری برقرار نمی‌باشد.

از نظر بردارهای یکه و نمایش مؤلفه‌ای بردارها نیز، چون ضرب خارجی بردارهای یکه، به صورت:

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = (1)\ (1)\ Sin\ 0 = 0$$

بوده و همچنین با کمی دقت و حوصله، پیداست که:

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} \qquad , \qquad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} \qquad , \qquad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$$

بنابراین، به طور تحلیلی و به سادگی می‌توان نشان داد که حاصل‌ضرب برداری دو بردار و به صورت:

$$a \times b = \hat{i}\ (a_y b_z - a_z b_y) + \hat{j}\ (a_z b_x - a_x b_z) + \hat{k}\ (a_x b_y - a_y b_x) \quad (۱۶-۱)$$

می‌باشد. اگر کمی در مورد ماتریس‌ها تحقیق کنیم، می‌توان دریافت که رابطه (۱-۱۶) را می‌توان به صورت دترمینان ماتریس زیر تعریف نمود:

$$a \times b = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad (۱۷-۱)$$

برای تحقیق این که آیا دستگاه مختصات xyz، یک دستگاه راست گرد می‌باشد یا خیر، از قاعده دست راست برای ضرب برداری $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$ در آن دستگاه استفاده کنید. اگر جهت پیچش انگشتان دست شما از بردار یکه $\hat{i}$ (یعنی جهت مثبت محور x ها) به بردار یکه $\hat{j}$ (یعنی جهت مثبت محور y ها) و در پی آن، انگشت شست شما، سوی مثبت محور z ها (یعنی بردار یکه $\hat{k}$) را نشان دهد، دستگاه مختصات مورد بحث، راستگرد خواهد بود.

مثال۱۰-۱. سه بردار $a = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ و $b = -\hat{i} - 4\hat{j} + 2k$ و نیز $c = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ را در نظر بگیرید. مقادیر الف) $a.(b \times c)$ و ب) $a.(b + c)$ و نیز ج) $a \times (b + c)$ را محاسبه نمایید.

حل: الف) در این‌جا، ابتدا بردار $b \times c$ را محاسبه می‌کنیم:

$$b \times c = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -8\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}$$

و سپس بردار a را در این بردار به دست آمده، ضرب نقطه‌ای می‌کنیم. بدین صورت که:

$$a.(b \times c) = (3)(-8) + (3)(5) + (-2)(6) = -21$$

ب) برای حل این قسمت، ابتدا بردار $b + c$ را محاسبه می‌کنیم:

$$b + c = (-1+2)\hat{i} + (-4+2)\hat{j} + (2+1)\hat{k} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

و سپس ضرب داخلی بردار به دست آمده را با بردار a محاسبه می‌کنیم:

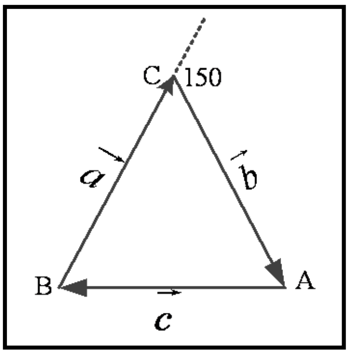
$$a.(b + c) = (3)(1) + (3)(-2) + (-2)(3) = -9$$

ج) در این‌جا حاصل‌ضرب برداری بردار $b+c$ که در بند ب محاسبه شده است را در بردار a به دست می‌آوریم:

$$a\times(b+c)=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 3 & 3 & -2\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix}=5\hat{i}-11\hat{j}-9\hat{k}$$

۸ – ۱. نمونه مسائل حل شده

۱. زاویه میان بردارهای هم اندازه‌ی a و b برابر $150°$ می‌باشد. اگر $a+b+c=0$ باشد، زاویه بین دو بردار a و b را محاسبه کنید.



حل: می‌دانیم که مجموع زوایای داخلی مثلث برابر $180°$ می‌باشد. بنابراین در شکل مقابل، مجموع زاویه‌های A و B برابر $150°$ خواهد بود و چون زاویه C برابر $30°$ می‌باشد، با توجه به مساوی بودن زاویه‌های A و B (مثلث متساوی الساقین می‌باشد)، لذا زاویه A و B هرکدام برابر $75°$ می‌شوند.

زاویه بین بردار c و b برابر زاویه خارجی A می‌باشد که برابر $180°-75°=105°$ می‌باشد.

۲. برآیند دو بردار عمود بر هم r و s برابر 20 واحد می‌باشد. اگر دو بردار، رابطه‌ای به صورت $r=(3/4)\ s$ داشته باشند، اندازه هرکدام از بردارها را بیابید.

حل: چون دو بردار عمود بر هم می‌باشند، پس رابطه فیثاغورث در مورد آن‌ها صادق است. یعنی:

$$|r+s|^2=|r|^2+|s|^2$$

در این‌جا به جای بردار r، مساوی آن یعنی $s\ (3/4)$ را جاگذاری و به جای $|r+s|$، اندازه بردار برآیند یعنی 20 واحد را جاگذاری می‌کنیم.

$$20^2=|(3/4)s|^2+|s|^2=(9/16)|s|^2+|s|^2=(25/16)|s|^2=|(5/4)s|^2$$

به عبارت دیگر با ساده‌سازی عبارات فوق، داریم: $20=(5/4)|s|$ و یا: $|s|=16$

و لذا در مورد r داریم که: $|r|=(3/4)|s|=(3/4)(16)=12$

۳. اگر مجموع دو بردار $r=3\hat{i}+a\hat{j}$ و $s=b\hat{i}-\hat{j}$ برابر $u=\hat{i}+\hat{j}$ با باشد، مقادیر a و b را محاسبه کنید.

حل: چون $u=r+s$ می‌باشد، پس: $\begin{cases}3+b=1\\ a-1=1\end{cases}$ و لذا نتیجه می‌شود: $a=2$ و $b=-2$

۴. بردار $c=9\hat{i}+12\hat{j}$ را به دو بردار تجزیه نمودیم، طوری که یکی از آن‌ها واقع در ربع اول و با جهت مثبت محور x ها زاویه $45°$ می‌سازد و دیگری به صورت $b=2\hat{i}+m\hat{j}$ می‌باشد. مقدار m چقدر است؟

حل: کاملاً پیداست که بردار c، برآیند بردارهای a و b می‌باشد، یعنی $c=a+b$. اگر بردار a دارای بزرگی (اندازه) a باشد، چون با محور x ها،زاویه $45°$ می‌سازد، پس نمایش مؤلفه‌ای بردار a به صورت:

$$a = \hat{i}\, aCos45° + \hat{j} aSin45° = (\sqrt{2}/2)a\hat{i} + (\sqrt{2}/2)a\hat{j}$$

خواهد بود و لذا داریم:

$$9\hat{i} + 12\hat{j} = \left((\sqrt{2}/2)a\hat{i} + (\sqrt{2}/2)a\hat{j}\right) + \left(2\hat{i} + m\hat{j}\right)$$
$$= \left((\sqrt{2}/2)a + 2\right)\hat{i} + \left((\sqrt{2}/2)a + 2\right)\hat{j}$$

بنابراین باید $\begin{cases} 9 = (\sqrt{2}/2)a + 2 \\ 12 = (\sqrt{2}/2)a + m \end{cases}$ که از رابطه بالایی $a = 7\sqrt{2}$ به دست می‌آید و با جاگذاری این مقدار در رابطه پایینی داریم:

$$12 = (\sqrt{2}/2)(7\sqrt{2}) + m = 7 + m \quad \text{و یا:} \quad m = 5$$

۵. اگر $a = \hat{i} - 3\hat{j}$ و $b = 3\hat{i} - \hat{j}$ باشد، طول بردار $r = a + b$ را محاسبه کنید.

حل: ابتدا بردار $r = a + b$ را محاسبه می‌کنیم، به این صورت که:

$$r = a + b = (1+3)\hat{i} + (-3 + (-1)) = 4\hat{i} - 4\hat{j}$$

و بنابراین، طول این بردار برابر است با:

$$|r| = \sqrt{r_x^{\,2} + r_y^{\,2}} = \sqrt{(4)^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$$

۶. اگر $d_1 + d_2 = 5d_3$ و نیز $d_1 - d_2 = 3d_3$ و بالاخره، $d_3 = 2\hat{i} + 4\hat{j}$ باشد، الف) بردار d_1 و ب) بردار d_2 را محاسبه کنید.

حل: الف) اگر دو بردار $d_1 + d_2$ و $d_1 - d_2$ را با هم جمع کنیم، آن گاه:

$$(d_1 + d_2) + (d_1 - d_2) = 5d_3 + 3d_3 = 8d_3$$

طرف چپ رابطه فوق را ساده می‌کنیم و پس از جاگذاری مقدار بردار d_3 در طرف راست، داریم:

$$2d_1 = 8d_3 = 8(2\hat{i} + 4\hat{j}) = 16\hat{i} + 32\hat{j}$$

بنابراین نتیجه می‌شود که $d_1 = 8\hat{i} + 16\hat{j}$ خواهد شد.

ب) مقدار d_1 در بند الف محاسبه گردید، پس با استفاده از رابطه $d_1 + d_2 = 5d_3$، خواهیم داشت:

$$(8\hat{i} + 16\hat{j}) + d_2 = 5(2\hat{i} + 4\hat{j}) \qquad \Rightarrow \qquad d_2 = 2\hat{i} + 4\hat{j}$$

۷. بردارهای زیر را در نظر بگیرید و مقادیر خواسته شده را محاسبه کنید:

$$a = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k} \quad \text{و} \quad b = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k} \quad \text{و} \quad c = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

الف) $2a.(b+c)$ ب) $3c.(a-b)$

ج) $a \times (b - 2c)$ د) $-2b.(a \times b)$

حل: الف) ابتدا بردار $b + c$ را محاسبه می‌کنیم:

$$b + c = (\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}) + (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 3\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$$

و سپس این بردار را در $2a$ ضرب می‌کنیم:

$$2a.(b+c) = 2(2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}).(3\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}) = 12 + 6 - 6 = 12$$

ب) در این قسمت نیز ابتدا $a - b$ را محاسبه می‌کنیم:

$$a-b=(2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})-(\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k})=\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$$

و سپس این بردار را در3c ضرب نقطه‌ای می کنیم:

$$3c.(a-b)=3(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}).(\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k})=6-3-9=-6$$

ج) ابتدا بردار $b-2c$ را محاسبه می کنیم:

$$b-2c=(\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k})-2(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})=-3\hat{i}+4\hat{j}$$

و سپس داریم:

$$a\times(b-2c)=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & 3 & -1\\ -3 & 4 & 0\end{vmatrix}=4\hat{i}+3\hat{j}+17\hat{k}$$

د) ابتدا بردار $a\times b$ را محاسبه می کنیم:

$$a\times b=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & 3 & -1\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}=8\hat{i}-5\hat{j}+\hat{k}$$

و بنابراین خواهیم داشت:

$$-2b.(a\times b)=-2(\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}).(8\hat{i}-5\hat{j}+\hat{k})=-16+20-4=0$$

۹ – ۱. مسائل تکمیلی

۱. مؤلفه x بردار a برابر 25m– و مؤلفه y آن معادل 40m می‌باشد. الف) بزرگی بردار a و ب) زاویه میان جهت بردار a و محور مثبت x ها چقدر است؟

۲. اگر بردار r در جهت 250 درجه پادساعتگرد نسبت به سوی مثبت محور x ها و دارای بزرگی 7.2m باشد، الف) مؤلفه x و ب) مؤلفه y بردار r را در صفحه مختصاتی، محاسبه کنید.

۳. بردارهای $a=2\hat{i}-3\hat{j}$ و $b=\hat{i}+2\hat{j}$ را در نظر بگیرید. بردارهای الف) $a+b$ و ب) $a-b$ و ج) اندازه بردارهای a و **b** و $a+b$ و $a-b$ را محاسبه نمایید.

۴. دو بردار $a=a\hat{i}$ و b را در نظر بگیرید. اگر $a+b$ بردار سومی باشد که به صورت $3a\hat{j}$ تعریف شود و همچنین بزرگی بردار b، معادل 7 باشد، بزرگی بردار a را محاسبه کنید.

۵. مؤلفه‌های متعامد برداری به بزرگی 10 واحد را که با محور افقی زاویه $30°$ می‌سازد را محاسبه کنید.

۶. دو بردار a و b که بزرگی یکسانی داشته و طول آن‌ها 10m می‌باشند نیز زاویه‌های آن‌ها با محور x ها برابر $\theta_a=30°$ و $\theta_b=105°$ می‌باشند را در نظر بگیرید. مطلوب است، الف) مؤلفه x و ب) مؤلفه y بردار $r=a+b$ و ج) بزرگی بردار r و د) جهتی که بردار r با محور x ها می‌سازد.

۷. دو بردار $a=3\hat{i}+5\hat{j}$ و $b=2\hat{i}+4\hat{j}$ داده شده‌اند. الف) $a\times b$ و ب) $a.b$ و همچنین ج) $(a+b).b$ را محاسبه نمایید.

۸. سه بردار a و b و c را به صورت مقابل در نظر بگیرید:

$$c=7\hat{i}-8\hat{j} \quad \text{و} \quad b=-3\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k} \quad \text{و} \quad a=2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}$$

حاصل عبارت الف) $3c.(2a\times b)$ و ب) $-2c\times(a-b)$ را محاسبه کنید.

۹. اگر برآیند بردارهای $r=2\hat{i}+b\hat{j}$ و $s=b\hat{i}-4\hat{j}$ و $u=3\hat{i}+5\hat{j}$ با محور x ها زاویه θ بسازد، طوری که $\tan\theta=1/4$ باشد، مقدار b را محاسبه کنید.

۱۰. اگر برآیند سه بردار $a=4\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$ و $b=2\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}$ و بردار c برابر صفر باشد، بردار c را محاسبه کنید.

۱۱. بردارهای $a=\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ و $b=\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ و $c=2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ را در نظر بگیرید، مطلوب است:

الف) بزرگی بردار $a\times b$ وب) بردار $a-(b\times c)$ و ج) $(2a+b)\times c$.

فصل ۲
بار الکتریکی

مقدمه

مبدأ علم الکتریسیته، به مشاهدات بسیار قدیمی یونانیان بر می‌گردد. فیلسوفان یونـانی بـا بررسـی و تحقیـق، مشاهده نمودند که اگر قطعه‌ای از کهربا را مالش داده و آن‌را به تکه‌های کاه نزدیک کنیم، کهربـا خـرده‌هـای کاه را می‌رباید. از سویی دیگر مبدأ علم مغناطیس، به مشاهده این واقعیت بر می‌گـردد کـه بعضـی از سـنگ‌هـا (یعنی سنگ‌های مگنتیت) به طور طبیعی، آهن را جذب می‌کنند.

علم الکتریسیته به موازات علم مغناطیس، تکامل می‌یافتند تـا ایـن کـه در اوایـل قـرن نـوزدهم، دانشـمندان رابطه‌ای بین الکتریسیته و مغناطیس یافتند، بدین‌صورت که جریان الکتریکی در یـک سـیم مـی‌توانـد عقربـه‌ی قطب نمای مغناطیسی را تحت تأثیر قرار دهد. بدین گونه بود که الکترومغناطیس به عنوان یک علم ارائه گردید و این علم تا آن‌جا پیشرفت نمود که امروزه، مبنای کار انواع وسایل الکتریکی و الکترونیکی می‌باشد.

یکی از دانشمندانی که در علم الکترومغناطیس تلاش‌های بسیار فراوانی داشته ماکسول[1] می‌باشد که در این علم معادلات بسیار مهمی را ارائه نموده است. تلفیق الکتریسیته با مغناطیس –که معادلات ماکسول را بـه همـراه داشت– توانست این نتیجه را برای دانشمندان به ارمغان بیاورد که نور، مـاهیتی الکترومغناطیسـی دارد و سـرعت آن را می‌توان با اندازه‌گیری‌های صرفاً الکتریکی و مغناطیسی، تعیین نمود. پـس بـدین صـورت، اپتیـک نیـز بـا الکتریسیته رابطه‌ی نزدیکی پیدا نمود.

در این فصل، ابتدا با بارهای الکتریکی آشنا می‌شویم و سپس در مورد تأثیر بارهای الکتریکی بر هـم دیگـر بحث می‌کنیم.

۲–۱. بار الکتریکی

ماهیت بار الکتریکی معمولاً در هوای خشک هنگامی که به درب دست می‌زنیم و جرقه‌ای را حس می‌کنیم و یا هنگامی که پیراهن پشمی خود را از تن بیرون می‌آوریم، کاملاً مشهود است. حتی جرقه‌های حاصل از وجود بار الکتریکی را می‌توانیم بشنویم.

این موارد گفته شده و صدها نمونه‌ی دیگر، حاکی از آن است که بار الکتریکی در تمامی مواد و اجسام وجود دارد. به عبارت دیگر، می‌توان چنین ادعا نمود که هر جسمی، شامل تعداد بی شماری بارهای الکتریکی می‌باشند. پس بار الکتریکی، یک مشخصه ذاتی ذراتی است که یک جسم را می‌سازند.

ممکن است این شبهه به وجود آید که اگر اجسام، شامل بارهای الکتریکی هستند، چرا آثارشان همواره وجود ندارد و هرگاه شرایط ایجاد شود، آثار بارهای الکتریکی را مشاهده می‌کنیم. جواب این موضوع بسیار ساده است. هر جسم دارای مقادیر یکسانی از دو نوع بار الکتریکی می‌باشد که از لحاظ الکتریکی جسم را خنثی

[1]. James Clerk Maxwell

می‌کنند. این دو نوع بار الکتریکی توسط فرانکلین[1] (دانشمند آلمانی) به عنوان بار الکتریکی مثبت و بار الکتریکی منفی، نام‌گذاری گردید. نکته‌ای دیگر این است که چرا ادعا می‌کنیم دو نوع بار الکتریکی وجود دارد؟ جواب این سؤال نیز ساده می‌باشد. اگر دو جسم مثل شیشه و ابریشم را به یکدیگر مالش دهیم، خنثی بودن الکتریکی آن‌ها را به هم خواهیم زد و مقدار بسیار کمی بار الکتریکی از یکی به دیگری منقل می‌شود، طوری که شیشه، بار الکتریکی مثبت و ابریشم، بار الکتریکی منفی خواهد گرفت.

لازم به ذکر است که بارهای الکتریکی برهم دیگر تأثیر می‌گذارند، طوری که بارهای الکتریکی همنام، هم دیگر را دفع و بارهای الکتریکی ناهمنام، هم دیگر را جذب می‌کنند. این واقعیت را می‌توان با این آزمایش تحقیق نمود: اگر یک میله‌ی شیشه‌ای را که با یک نخ آویزان نمودیم با یک تکه پارچه‌ی ابریشمی مالش دهیم و پس از آن یک میله‌ی شیشه‌ای دیگر را که با پارچه‌ی ابریشمی مالش دادیم به این میله‌ی آویزان نزدیک کنیم، این دو میله‌ی شیشه‌ای، هم دیگر را دفع می‌کنند. حال اگر میله‌ای پلاستیکی که با پارچه‌ی پشمی مالش داده‌ایم را به میله شیشه‌ای آویزان نزدیک کنیم، این دو میله هم دیگر را می‌ربایند.

واحد اندازه‌گیری بار الکتریکی، کولن نام دارد و با نماد C نشان داده می‌شود. مقدار یک کولن بار الکتریکی را در بخش‌های بعدی این فصل بحث می‌کنیم، ولی در این‌جا ذکر می‌کنیم که اندازه‌ی بار الکتریکی یک الکترون که بار منفی دارد برابر با $-1.6\times10^{-19}C$ می‌باشد و آن‌را با $-e$ نمایش می‌دهند. هم‌چنین بار الکتریکی یک پروتون را مساوی با بار الکتریکی یک الکترون و فقط مقدار آن‌را مثبت در نظر می‌گیرند. بنابراین بار الکتریکی یک پروتون را با $+e$ نمایش می‌دهند.

روشن است که اگر به جسمی تعداد n الکترون داده شود، بار الکتریکی جسم برابر با $q=-ne$ و یا اگر تعداد n الکترون از جسمی گرفته شود، بار الکتریکی جسم برابر $q=+ne$ خواهد بود.

مثال ۱-۲. اگر بار الکتریکی هر الکترون $-1.6\times10^{-19}C$ باشد برای یک کولن الکتریسیته چند الکترون باید جا بجا شود ؟

حل: چون $q=-ne$ می‌باشد بنابراین:

$$1C=-ne=-n(-1.6\times10^{-19}C)$$

و یا : $n=6.25\times10^{18}$

اشاره شد که برای باردار کردن اجسام باید همواره تعدادی الکترون به جسم بدهیم و یا از آن بگیریم. توجه داشته باشید که در این مبادله‌ی الکترون، هیچ‌گاه الکترون تولید نمی‌شود و یا از بین هم نمی‌رود، بلکه تنها از جسمی به جسم دیگر منتقل می‌شود. با توجه به این که هر الکترون دارای مقدار معینی بار الکتریکی است می‌توان گفت: « بار الکتریکی به وجود نمی‌آید و از بین هم نمی‌رود و فقط از یک جسم به جسم دیگر منتقل می‌شود.» این بیان را « پایستگی بار الکتریکی» می‌نامیم.

۲-۲. رساناها و نارساناها

هرگاه یک میله‌ی فلزی را با پوست خز مالش دهیم به نظر می‌رسد که در میله، بار الکتریکی به وجود نخواهد آمد، ولی اگر میله‌ی فلزی را با یک دسته‌ی پلاستیکی بگیریم وسعی کنیم در هنگام مالش دادن، میله‌ی فلزی با دست تماس پیدا نکند، می‌توانیم میله‌ی فلزی را باردار کنیم. علت این امر، این است که بعضی از مواد

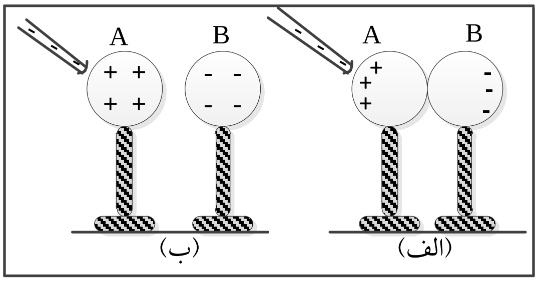
[1]. Benjamin Franklin

مثل میله‌ی فلزی توانایی حرکت دادن بار الکتریکی را در خود دارند و بعضی دیگر از مواد مثل پلاستیک این توان را ندارند. بر حسب قابلیت حرکت بارهای الکتریکی در اجسام، می‌توان آن‌ها را به دو دسته تقسیم‌بندی نمود:

دسته‌ی اول، موادی که بار الکتریکی در آن‌ها می‌تواند نسبتاً به آزادی حرکت کند. این مواد رسانا[1] یا هادی نامیده می‌شود. فلزات بدن انسان و الکترولیت‌ها، نمونه‌هایی از رساناها می‌باشند.

دسته‌ی دوم، موادی هستند که در آن‌ها، بار الکتریکی توانایی حرکت آزاد و جابه‌جا شدن را ندارند. این مواد نارسانا[2] یا عایق خوانده می‌شوند.لاستیک، چوب و آب خالص نمونه‌هایی از مواد عایق می‌باشند. لازم است بدانیم موادی هم وجود دارند که از لحاظ رسانندگی حالتی بین رساناها و عایق‌ها می‌باشند. عناصری مثل سیلیسیم و ژرمانیوم از این مواد می‌باشند. به این گروه از مواد، «نیم‌رسانا[3]» یا « نیمه‌هادی » گفته می‌شود. نیم رساناها درساخت ادوات الکترونیکی مثل‌ترانزیستورها و تراشه‌های الکترونیکی کاربرد دارند. البته «ابررساناها[4]» نیز موادی هستند که رسانایی آن‌ها بسیار بالاست و بارهای الکتریکی به سادگی در این مواد حرکت می‌کنند. یک آزمایش بسیار دقیق به نام اثر هال (که در بخش ۱۰-۵ در مورد آن بحث می‌شود) نشان می‌دهد که در فلزات، فقط بار منفی است که آزادانه حرکت می‌کند. بار الکتریکی مثبت در موادی مثل شیشه و پلاستیک، بدون حرکت می‌باشد. در واقع حامل‌های بار الکتریکی در فلزات و اکثر مواد دیگر، الکترون‌های آزادمی‌باشند. در تشکیل یک ماده‌ی رسانای جامد، الکترون‌های لایه‌ی خارجی‌اتم، آزادانه در سرتاسر حجم جسم جامد حرکت می‌کند.

حال می‌خواهیم تحقیق کنیم چگونه می‌توان اجسام رسانا را باردار نمود. برای باردار کردن اجسام رسانا به وسیله یک جسم باردار، از روش القا استفاده می‌شود. برای آشنایی با این روش، آزمایشی را انجام می‌دهیم. دو کره‌ی فلزی را که روی پایه‌های نارسانا (عایق) قرار دارند(شکل ۲-۱ الف) ، در تماس با هم قرار داده و یک تیغه‌ی پلاستیکی باردار را به کره‌ی A نزدیک می‌کنیم. در این حالت، الکترون‌های آزاد روی کره‌ی A و B توسط الکترون‌های اضافی میله دفع شده و در قسمت راست کره‌ی B که از میله دورتر است جمع می‌شوند. به این ترتیب، کره‌ی B بار منفی و کره‌ی A بار مثبت می‌گیرد.



شکل ۱-۲. باردار کردن رسانا

---

[1]. Conductor [2]. Insulator [3]. Semiconductor [4]. Superconductor

حال دو کره را از همدیگر فاصله می‌دهیم و سپس میله را از کره‌ی A دور می‌کنیم (شکل ۲-۱-ب) در این صورت، کره‌های مشابه A و B بارهای مساوی هم ولی مخالف هم خواهند داشت. اکنون اگر مثلاً با یک سیم، کره‌ی B را به زمین وصل کنیم، زمین به عنوان یک گیرنده‌ی الکترون، تمام الکترون‌های اضافی کره‌ی B را به خود منتقل می‌کند. همچنین اگر کره‌ی A را به زمین وصل کنیم، الکترون‌های زمین می‌توانند کره‌ی A را بی بار کنند. پس زمین، هم یک گیرنده الکترون محسوب می‌شود و هم یک چشمه بزرگ دهنده‌ی الکترون.

مثال ۲-۲. الف) دو کره‌ی مشابه دارای بار الکتریکی $q_1 = +6e$ و $q_2 = -4e$ است. اگر این دو کره را با هم تماس دهیم بار هرکدام چقدر خواهد شد ؟ ب) اگر $q_1 = +2e$ و $q_2 = +4e$ باشد چطور؟

حل: الف) در این حالت بار الکتریکی کل دو کره برابر با: $q = q_1 + q_2 = (+6e) + (-4e) = 2e$

خواهد بود و لذا بار روی هرکدام از کره‌ها معادل $q = +1e$ خواهد شد.

ب) در این حالت نیز داریم: $q = q_1 + q_2 = (+4e) + (+2e) = +6e$

بوده و لذا بار روی هر کدام از کره‌ها معادل $q = +3e$ خواهد شد.

۲-۳. قانون کولن

اشاره گردید که دو جسم باردار، اگر در فاصله‌ی معقولی از هم دیگر قرار داشته باشند، همدیگر را جذب یا دفع می‌نمایند(به عبارت دیگر برهم دیگر نیرو وارد می‌کنند). حال اگر جنس بارهای الکتریکی اجسام یکسان باشد، این نیرو دافعه است و اگر جنس بارهای الکتریکی دو جسم مخالف هم باشند، این نیرو جاذبه خواهد بود. در هر حال این نیرو چه جاذبه باشد و چه دافعه « نیروی الکتروستاتیکی » خوانده می‌شود. رابطه‌ای که نیروی الکتروستاتیکی را برای ذرات باردار معین می‌کند، توسط دانشمندی به نام کولن[1] معرفی شد و به افتخار ایشان، این رابطه به « قانون کولن » معروف گردید.

کولن، آزمایشی ترتیب داد و در آن آزمایش، به نتایجی دست یافت. اولین نتیجه‌ی تجربی کولن بدین-صورت بود که نیروی الکتروستاتیکی بین دو بار الکتریکی با عکس مجذور فاصله‌ی دو بار، رابطه دارد. نتیجه‌ی دیگر آزمایش کولن این بود که نیروی الکتروستاتیکی میان بارهای الکتریکی، به اندازه (بزرگی) بارها نیز بستگی داشت و با حاصل‌ضرب آن‌ها متناسب بود. اگرچه کولن، این مطالب را ثابت نکرد ولی به طور ضمنی به آن‌ها اشاره نمود. بنابراین در مورد دو بار الکتریکی q_1 و q_2 که به فاصله r از هم دیگر قرار داشته باشند، می‌توان گفت که نیروی الکتروستاتیکی بین آن‌ها با $q_1 q_2 / r^2$ متناسب خواهد بود. ضریب تناسب در این رابطه به صورت $K = 8.89 \times 10^9$ معرفی می‌شود که این عدد، « ثابت کولن » یا « ثابت الکتروستاتیکی » خوانده می‌شود. بنابراین قانون کولن به این صورت درمی‌آید:

$$F = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad (۲-۱)$$

راستای نیروی الکتروستاتیکی در امتداد خط واصل دو بار الکتریکی می‌باشد و جهت آن نیز اگر نیرو جاذبه باشد به سوی همدیگر و اگر نیرو دافعه باشد در جهت عکس خواهد بود.

1. Charles Augustin Coulomb

در دستگاه بین‌المللی یکاها (SI) که واحد بار الکتریکی کولن (با علامت اختصاری C) می‌باشد واحد کمیت « ثابت الکتروستاتیکی » به صورت $\frac{N.m^2}{C^2}$ خواهد بود. البته در بسیاری از کتب علمی، ثابت K به صورت $K=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ معرفی می‌شود که در آن، کمیت $\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\frac{C^2}{N.m^2}$ به عنوان ثابت گذردهی خلأ می‌باشد. مقادیر K و ε_0 عددهای ثابت می‌باشند. رابطه (۲- ۱) که به قانون کولن معروف است فقط در اجسام بارداری که اندازه‌ی آن‌ها خیلی کوچک‌تر از فاصله‌ی میان آن‌هاست صدق می‌کند. به عبارت دیگر، این قانون برای بارهای نقطه‌ای صادق است.

بد نیست بدانید که تاکنون هیچ استثنایی برای نیروی الکتروستاتیکی و قانون کولن یافت نشده است و علی‌رغم این که مکانیک کلاسیک نیوتن در حیطه‌ی اتمی شکست می‌خورد و باید از فیزیک کوانتومی به جای آن استفاده کرد، ولی قانون کولن حتی در ابعاد اتمی نیز برقرار می‌باشد و قادر به توجیه نیروهای موجود بین هسته‌ها و یا بین الکترون با هسته‌های باردار می‌باشد.

مثال ۳– ۲. دو ذره با بار الکتریکی $4\times10^{-16}C$ و $-3\times10^{-16}C$ که به فاصله $10cm$ از هم قرار دارند، چه نیرویی برهم وارد می‌کنند؟ (اندازه و نوع نیرو را بیان کنید.)

حل: با استفاده از رابطه (۲–۱) داریم: $r=10cm=0.1m$ و $F=K\frac{q_1q_2}{r^2}$

و لذا:
$$F=\frac{(8.85\times10^9 N.m^2/C^2)(4\times10^{-16}C)(-3\times10^{-16}C)}{(0.1m)^2}=-10.65\times10^{-19}N$$

و چون بارهای الکتریکی غیر هم نام می‌باشند لذا نیروی فوق جاذبه می‌باشد.

مثال ۴– ۲. دو ذره با بارهای الکتریکی $4\mu C$ و $8\mu C$ از فاصله‌ی $4cm$ بر یک دیگر چند نیوتن نیرو وارد می‌کنند ؟ نوع این نیرو رانشی است یا ربایشی ؟

حل: ابتدا بارها و فاصله‌ی بین آن‌ها را به صورت استاندارد در می‌آوریم:

$$q_1=4\mu C=4\times10^{-6}C \qquad q_2=8\mu C=8\times10^{-6}C \qquad r=4cm=0.04m$$

و سپس مقادیر را در رابطه (۲–۱) جاگذاری می‌کنیم:

$$F=\frac{(8.85\times10^9 N.m^2/C^2)(4\times10^{-6}C)(8\times10^{-6}C)}{(0.04m)^2}=178N$$

و چون بارهای الکتریکی هم نام می‌باشند پس این نیرو رانشی خواهد بود.

اشاره نمودیم که واحد بار الکتریکی کولن است، ولی مقدار یک کولن بار الکتریکی را معرفی نکردیم. کولن که واحد بار الکتریکی است، از یکای جریان الکتریکی (آمپر) به دست می‌آید.

می‌دانیم در صورتی که دو سر یک سیم را به قطب‌های یک باتری وصل کنیم، جریان الکتریکی i در سیم برقرار می‌شود. این جریان الکتریکی را می‌توان به صورت شارش بار الکتریکی تجسم نمود. پس می‌توان گفت: « اگر در یک سیم، جریان پایای یک آمپر برقرار باشد، یک کولن مقدار باری است که در مدت زمان یک ثانیه از هر مقطع سیم، شارش پیدا می‌کند. »

بنا به تعریف، رابطه‌ی میان بار الکتریکی که در مدت زمان t ثانیه توسط جریان الکتریکی i جابه‌جا می‌شود، چنین خواهد بود:

$$q=it \qquad (۲–۲)$$

که در آن چون t برحسب ثانیه و i بر حسب آمپر (A) می‌باشد ، بنابراین q بر حسب کولن خواهد بود.

مثال ۵– ۲. در یک آذرخش، جریانی معادل $2.5\times10^{-4}A$ در مدت $20\mu s$ به وجود آمده است. در این پدیده چقدر بار الکتریکی جابه‌جا شده است؟

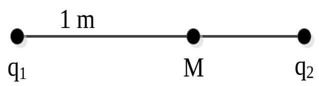
حل: بر اساس رابطه (۲–۲) می‌توان گفت که: $q = it = (2.5\times10^{-4}A)(20\times10^{-6}s) = 0.5C$

اگر بیش از دو بار الکتریکی داشته باشیم نیروی الکتروستاتیکی وارد بر ذره، برآیند نیروهایی است که هر یک از بارهای الکتریکی دیگر بر آن ذره وارد می‌کنند. به عبارت دیگر، نیروی وارد شده بر بار الکتریکی q_1 از طرف سایر بارهای الکتریکی عبارتند از:

$$F_1 = F_{12} + F_{13} + \dots \qquad (۲–۳)$$

که در آن F_{12} نیرویی است که از طرف بار الکتریکی q_2 بر بار الکتریکی q_1 وارد می‌شود.

مثال ۶ – ۲. در شکل (۲-۲) اگر $q_1 = 20\mu C$ و $q_2 = 5\mu C$ باشد نقطه M در چه فاصله‌ای از بار الکتریکی q_2 باید قرار گیرد تا برآیند نیروهای وارد بر آن از طرف بارهای دیگر صفر باشد؟



شکل ۲ – ۲. مثال ۶–۲

حل: اگر بار الکتریکی q_3 را در نقطه M قرار دهیم آن گاه بار الکتریکی q_1در فاصله $1m$ و بار الکتریکی q_2 در فاصله x از آن قرارمی‌گیرد و نیروی رانشی از طرف q_1 برابر با نیروی رانشی از طرف بار الکتریکی q_2 خواهد بود. لذا:

$$F_{13} = F_{23} \qquad \Rightarrow \qquad K\frac{q_1q_3}{r_1^2} = K\frac{q_2q_3}{r_2^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{20}{1} = \frac{5}{x^2}$$

که با ساده کردن، مقدار x برابر با $x = 0.5m = 50cm$ به دست خواهد آمد.

۴–۲. بار الکتریکی کوانتیده است

دانشمندان با آزمایش‌های فراوان دریافتند که بار الکتریکی در طبیعت همیشه مضرب صحیحی از فقط یک بار الکتریکی است. این بار واحد را با e نمایش می‌دهیم که همان بار الکترون است. یعنی بار الکتریکی تمامی ذرات باردار دقیقاً با مضرب صحیحی از بار الکترون برابری می‌کند. مثلاً بار یک پروتون درست برابر با منفی بار الکترون و بار پوزیترون دقیقاً برابر با بار الکتریکی یک الکترون است.

در فیزیک هرگاه یک خاصیت فیزیکی مثل بار الکتریکی به جای داشتن مقادیر پیوسته به صورت بسته‌های گسسته باشد آن خاصیت را «کوانتیده» می‌گویند. بنابراین بار الکتریکی که به صورت مضرب‌های صحیحی از eاندازه گیری می‌شود را کوانتیده و بار الکتریکی(e) را کوانتای بار الکتریکی می‌خوانند.

می‌توان با یک آزمایش ساده ثابت نمود که اتم یا مولکول هیدروژن که از یک پروتون و یک الکترون تشکیل شده است، از لحاظ الکتریکی خنثی است. مثلاً اگر باریکه‌ای از اتم‌های هیدروژن را در یک میدان الکتریکی قوی که در فضای خلأ ایجاد شده است عبور دهیم، هیچ انحرافی را در مسیر انتهای هیدروژن مشاهده نمی‌کنیم. این نتیجه به این معناست که اتم هیدروژن از لحاظ الکتریکی خنثی است. (بار الکترون و پروتون همدیگر را خنثی می‌کنند) کوانتومی بودن بار الکتریکی در حیطهٔ عمل نظریه الکترومغناطیس کلاسیک نمی‌باشد. ما نیز آن را در نظر نمی‌گیریم و فرض می‌کنیم بار نقطه‌ای q می‌تواند هر تعدادی را داشته باشد.

۵ – ۲. نمونه مسائل حل شده

۱. اگر شدت جریان الکتریکی در مداری $3.2mA$ باشد، در مدت زمان ۳ ثانیه در هر مقطع از مدار چند الکترون می‌گذرد؟

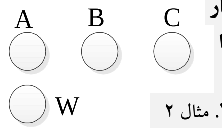
حل: ابتدا مقدار باری که در این مدت از مقطع سیم می‌گذرد را محاسبه می‌کنیم:

$$q = it = (3.2\times10^{-3}A)(3s) = 9.6\times10^{-3}C$$

و لذا این مقدار بار الکتریکی باید در رابطه $q = -ne$ صدق کند. لذا:

$$q = 9.6\times10^{-3}C = -n(-1.6\times10^{-19}C) \qquad \Rightarrow \qquad n = 6\times10^{16}$$

۲. شکل (۳-۲) چهارکره‌ی رسانای مشابه را نشان می‌دهد که در واقع به حد کافی از هم فاصله دارند. کره‌ی W بدون بار بوده و آن را به کره‌ی A تماس می‌دهیم و سپس آن‌را جدا و به کره B که بار اولیه آن $-32e$ است تماس می‌دهیم و سپس آن را جدا می‌کنیم. بالاخره کره‌ی W را به‌کره‌ی C با بار اولیه $+48e$ تماس می‌دهیم. اگر بار نهایی روی کره‌ی W برابر $+18e$ باشد بار روی کره A چقدر است؟



شکل ۳-۲. مثال ۲

حل: اگر بار الکتریکی روی کره‌ی A برابر q باشد، وقتی کره‌ی W را با کره‌ی A تماس می‌دهیم، بار روی کره‌های A و W معادل $q/2$ می‌شود. حال اگر کره‌ی W با بار $q/2$ را به کره‌ی B با بار $-32e$ تماس دهیم بار هرکدام از کره‌های B و W معادل $\dfrac{(q/2)-32e}{2}$ می‌شود و وقتی این کره را با کره C با بار الکتریکی $+48e$ تماس دهیم، بار روی کره‌های C و W برابر با: $\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{(q/2)-32e}{2}+48e\right]$ خواهد بود که این مقدار (بنا به صورت مسئله) باید معادل $18e$ باشد، پس:

$$18e = \frac{1}{2}\left[\frac{(q/2)-32e}{2}+48e\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{q}{4}+32e\right]$$

و لذا $q = +16e$ به دست می‌آید.

۳. نیروی الکتروستاتیکی میان دو یون مشابه که به فاصله‌ی $5\times10^{-10}m$ از هم قرار دارند برابر $3.7\times10^{-9}N$ است.الف) بار هر یون چقدر است؟ ب) هر یون چند الکترون از دست داده است؟

حل: الف) اگر بار هرکدام از یون‌ها را برابر q بدانیم، آنگاه:

$$3.7\times10^{-9}N = \frac{(8.85\times10^{9}N.m^2/C^2)q^2}{(5\times10^{-10}m)^2} \qquad \Rightarrow \qquad q^2 = 10.39\times10^{-36}$$

و لذا مقدار q که بار هر یون می‌باشد برابر خواهد بود با: $q = 3.2\times10^{-19}C$

ب) این میزان بار الکتریکی برابر با تعداد: $n = \dfrac{q}{e} = \dfrac{3.2\times10^{-19}C}{1.6\times10^{-19}C} = 2$ الکترون بار الکتریکی می‌باشد.

٤. فاصله‌ی میان دو پروتون چقدر باشد تا نیروی دافعه‌ی الکتریکی وارد بر هرکدام، با نیروی وزن آن در سطح زمین برابر باشد. جرم پروتون $m_P = 1.7\times10^{-27}Kg$ می‌باشد.

حل: نیروی الکتروستاتیکی میان دو پروتون برابر است با:

$$F = K\frac{q_1q_2}{r^2} = \frac{(8.85\times10^{9}N.m^2/C^2)(1.6\times10^{-19}C)(1.6\times10^{-19}C)}{r^2} = \frac{22.78\times10^{-29}}{r^2}$$

این نیرو باید با نیروی وزن پروتون برابر باشد. نیروی وزن پروتون برابر است با:

$$W = m_pg = (1.7\times10^{-27}kg)(9.8m/s^2) = 16.66\times10^{-27}N$$