

به نام خدا

ایده آل های به طور قوی تحویل ناپذیر

نویسنده:

لیلا علی اصغر پور

انتشارات ارسطو

(چاپ و نشر ایران)

۱۳۹۸

سرشناسه	: علی اصغرپور، لیلا، ۱۳۵۸-
عنوان و نام پدیدآور	: Aliasgharpoor, Leila
مشخصات نشر	: ایده آل‌های به طور قوی تحویل ناپذیر / مولف لیلا علی اصغرپور. تهران: ارسطو، ۱۳۹۷.
مشخصات ظاهری	: ج، ۸۰ص: مصور، جدول، نمودار.
شابک	: ۹۷۸-۶۰۰-۴۳۲-۳۰۰-۰
وضعیت فهرست نویسی	: فیپا
یادداشت	: واژه‌نامه.
موضوع	: جبرهای تعویض ناپذیر
موضوع	: Noncommutative algebras
رده بندی کنگره	: ۱۳۹۷۴/۲۵۱QA ۹ الف ۸ع /
رده بندی دیویی	: ۴/۵۱۲
شماره کتابشناسی ملی	: ۵۵۴۰۶۳۶

نام کتاب: ایده آل‌های به طور قوی تحویل ناپذیر
نویسنده: لیلا علی اصغرپور
ناشر: ارسطو (با همکاری سامانه اطلاع رسانی چاپ و نشر ایران)
صفحه آرایشی، تنظیم و طرح جلد: پروانه مهاجر
تیراژ: ۱۰۰۰ جلد
نوبت چاپ: اول - ۱۳۹۸
چاپ: مدیران
قیمت: ۱۲۰۰۰ تومان
شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۴۳۲-۳۰۰-۰
تلفن مرکز پخش: ۰۹۱۲۰۲۳۹۲۵۵
www.chaponashr.ir



فهرست مطالب

عنوان	صفحه
فصل اول : مقدمه	۴
فصل دوم: تعاریف مقدماتی	۱۰
۱. ۲ ایده آل های اولیه	۱۰
۲. ۲ حلقه های ارزیابی گسسته	۱۸
فصل سوم : ایده آل های به طور قوی تحویل ناپذیر	۳۲
۱. ۳ ایده آل های تحویل نا پذیر	۳۲
۲. ۳ ایده آل های به طور قوی تحویل نا پذیر	۳۸
فصل چهارم : ایده آل های به طور قوی تحویل نا پذیر در حلقه های نوتری	۶۱
۱.۴ ایده آل های به طور قوی تحویل ناپذیر در حلقه های نوتری	۶۱
مراجع	۷۸
واژه نامه انگلیسی به فارسی	۸۰

فصل ۱

مقدمه

در سراسر این کتاب، فرض می‌کنیم R یک حلقه جابجایی و یکدار با عضو همانی غیر صفر و I یک ایده آل آن باشد. از نماد " $\subseteq$ " برای شمول اکید استفاده می‌کنیم.

تعریف: حلقه R حسابی است، هرگاه برای هر سه ایده آل I ، J و K از R داشته باشیم:

$$(I + J) \cap K = (I \cap K) + (J \cap K)$$

یک ایده آل مانند I از حلقه R را تحول ناپذیر می‌نامیم هرگاه I اشتراک دو ایده آل که اکیدا مضموم آن‌هاست، نباشد. بنابراین اگر I یک ایده آل تحویل ناپذیر و K و J ایده آل‌هایی از R باشند، به طوری که داشته باشیم:

$$(J \cap K) + I = (J + I) \cap (K + I)$$

و اگر $J \cap K \subseteq I$ ایجاب کند که $J \subseteq I$ یا $K \subseteq I$. زیرا از آنجایی که $J \cap K \subseteq I$ ، لذا داریم:

$$(J \cap K) + I = I$$

بنابراین

$$(J + I) \cap (K + I) = I$$

در نتیجه $K \subseteq I$ و $J \subseteq I$.

ملاحظه ۱.۱.۱. مثال‌های زیر نشان می‌دهند که تساوی

$$(J \cap K) + I = (J + I) \cap (K + I)$$

در بعضی حالات درست است.

مثال: فرض کنید ایده آل‌های I ، J و K تولید شده توسط مونومیال‌ها بر حسب یک

R - رشته $a_1, \dots, a_n$ باشند و هرکدام از آن ایده آل‌ها شامل توانی از a_i که در آن

$1 \leq i \leq n-1$ باشند. در این صورت ایده آل‌های I ، J و K در رابطه

$$(J \cap K) + I = (J + I) \cap (K + I)$$

صدق می‌کنند.

مثال: اگر R حلقه چند جمله ای ها و متغیرهای $X_1, \dots, X_d$ روی یک میدان یا روی

حلقه اعداد صحیح باشند و I ، J و K تولید شده توسط مونومیال‌هایی بر حسب

$X_1, \dots, X_d$ باشند، آن گاه داریم :

$$(J \cap K) + I = (J + I) \cap (K + I)$$

ملاحظات بالا باعث می شود که ایده آل های به طور قوی تحویل ناپذیر را تعریف کنیم. که در مرجع بورباکی^۱ ایده آل های به طور قوی تحویل ناپذیر، نیمه اول نامیده شده است.

تعریف: فرض کنیم I ایده آلی از حلقه R باشد. I را یک ایده آل به طور قوی تحویل ناپذیر می گوئیم هرگاه به ازای هر دو ایده آل I و J از R داشته باشیم :

$$(J \cap K) \subseteq I \Rightarrow K \subseteq I \text{ یا } J \subseteq I$$

در این کتاب رابطه میان خانواده‌ای از ایده آل های تحویل ناپذیر، ایده آل های به طور قوی تحویل ناپذیر و ایده آل های اول از حلقه جابجایی R را بررسی می کنیم.

در بخش ۲ فصل دوم نشان می دهیم که هر ایده آل اول ، به طور قوی تحول ناپذیر است و ایده آل به طور قوی تحول ناپذیر ، یک ایده آل تحول ناپذیر است.

به عنوان اولین قضیه در این کتاب نشان می دهیم:

قضیه ۲.۱.۱. فرض می کنیم I یک ایده آل به طور قوی تحول ناپذیر $m -$ اولیه از

حلقه شبه موضعی (R, M) باشد. اگر $I \subset I:R m$ آن گاه :

i. $I:R m$ اصلی است.

ii. $I = (I:R m)m$

^۱ Bourbaki

iii. برای هر ایده آل J از R یا $J \subseteq I$ یا $I:R m \subseteq J$

یکی از ابزارهای لازم برای اثبات قضیه (۲.۱.۱) استفاده از قضیه زیر می باشد :

قضیه ۳.۱.۱. فرض می کنیم R یک حلقه و $J_1, \dots, J_k$ ایده آل هایی در R با تولید متناهی باشد، S را زیر حلقه ای از R در نظر می گیریم به طوری که S زیر مجموعه $J_1 \cup \dots \cup J_k$ باشد و حداقل $2 - n$ تا از J_i ها اول هستند، در این صورت S زیر مجموعه حداقل یکی از J_i هاست .

به علاوه نتیجه زیر از قضیه (۲.۱.۱) به دست می آید :

نتیجه ۴.۱.۱. فرض می کنیم $I \neq m$ یک ایده آل به طور قوی تحویل ناپذیر $-m$ اولیه در حلقه موضعی (R, m) باشد، در این صورت داریم:

i. $I = \cup \{q \mid q \subseteq I:R M \text{ و } q \leq R\}$ که در آن q یک ایده آل در R است.

ii. $I:R m = \cap \{q \mid I \cap q \text{ و } q \leq R\}$

به عنوان نتیجه اصلی در این کتاب نشان می دهیم :

قضیه ۵.۱.۱. فرض می کنیم I یک ایده آل غیر اول با $ht(I) \geq 0$ در یک حلقه نوتری R باشد، در این صورت I به طور قوی تحویل ناپذیر است اگر و فقط اگر I ،

اولیه باشد و R_p ، DVR باشد که در آن $p = \text{Rad}(I)$ و $p^n = I$ برای بعضی اعداد صحیح $n \geq 1$.

به علاوه نتیجه زیر از قضیه (۵.۱.۱) حاصل می شود:

نتیجه ۶.۱.۱. حوزه صحیح نوتری R یک ایده آل به طور قوی تحویل ناپذیر غیر اول دارد اگر و فقط اگر شامل یک ایده آل مانند p با بلندی ۱ باشد؛ به طوری که R_p یک DVR است.

در پایان قضیه زیر را ثابت می کنیم:

قضیه ۷.۱.۱. ایده آل I از یک حلقه نوتری R ، یک ایده آل به طور قوی تحویل ناپذیر غیر اول است اگر و فقط اگر ایده آل های p و C موجود باشد به طوری که $I \subset C \subseteq p$

i. p اول است.

ii. I ، p - اولیه است.

iii. برای هر ایده آل از R داریم: $J \subseteq I$ و $CR_p \subseteq JR_p$.

همچنین در حالت این داریم: $CR_p = I R_p :_{R_p} P R_p$

بویژه ، یک حلقه نوتری مانند R شامل یک ایده آل به طور قوی تحویل ناپذیر غیر اول است اگر فقط اگر یک ایده آل مانند I وجود داشته باشد که سه شرط بالا را داشته باشد.

تعاریف مقدماتی

۱.۲ ایده آل های اولیه

در سراسر این کتاب تمام حلقه ها جابجایی و یکدار در نظر گرفته شده اند.

تعریف ۱.۱.۲. هر حوزه صحیح R یک حلقه و $a \in R$ باشد، در این صورت مجموعه

$$aR := \{ar | r \in R\}$$

یک ایده آل از R است که آن را ایده آل تولید شده توسط a می نامیم و با نماد (a) نشان می دهیم.

تعریف ۲.۱.۲. یک حوزه صحیح مانند R را یک حوزه ایده آل اصلی (PID) می نامیم هرگاه هر ایده آل آن اصلی باشد.

تعریف ۳.۱.۲. فرض می کنیم R یک حلقه و p یک ایده آل اول از حلقه R باشد. مجموعه همه ایده آل های اول در R را با $spec R$ نشان می دهیم.

تعریف ۲.۱.۴. مجموعه همه ایده آل های ماکسیمال یک حلقه مانند R را با علامت $MaxR$ نشان می دهیم. بعلاوه، اشتراک همه ایده آل های ماکسیمال حلقه R را رادیکال جاکوبسون R می نامیم و با نماد $J(R)$ نشان می دهیم.

$$J(R) = \bigcap_{m \in MaxR} m$$

لم ۲.۱.۵. (لم ناکایاما) فرض می کنیم R یک حلقه و I یک ایده آل با تولید متناهی باشد. اگر K یک ایده آل از R باشد به طوری که $K \subseteq J(R)$ و $IK = I$ در این صورت $I = 0$.^۲

تعریف ۲.۱.۶. فرض می کنیم R یک حلقه و q ایده آلی از R باشد. در این صورت q را ایده آل اولیه می گوییم؛ هر گاه $q \neq R$ و به ازای $x, y \in R$ ، اگر $x \in q$ یا $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری که $y^n \in q$.

مثال: هر ایده آل اول یک ایده آل اولیه است.

تعریف ۲.۱.۷. فرض می کنیم R یک حلقه و a ایده آلی از R باشد. رادیکال a را با علامت $\sqrt{a}$ یا $r(a)$ یا $Rad(a)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$Rad(a) = \sqrt{a} = r(a) = \{x \in R ; \exists n \in \mathbb{N}, x^n \in a\}$$

^۲ Nakayama lemma

بویژه، اگر $a = 0$ آن گاه $\sqrt{0}$ را مجموعه همه اعضای پوچ توان R نامیده و با نماد $nil(R)$ نشان می‌دهیم.

نتیجه ۲.۱.۸. اگر R یک حلقه و I ایده‌آلی از R باشد، در این صورت

$$Rad(I) = \bigcap_{I \subseteq p} p \text{ که در آن } p \in spec R.$$

بویژه، $Rad(0) = \bigcap_{p \in spec R} p$.

برهان. رجوع شود به مرجع [۱۳] صفحه ۵۲.

نتیجه ۲.۱.۹. فرض می‌کنیم R یک حلقه و a یک ایده‌آل است و $a \subseteq Rad(a)$.

برهان. رجوع شود به مرجع [۱۶] لم ۴.۵.

نتیجه ۲.۱.۱۰. فرض می‌کنیم p یک ایده‌آل اول در R باشد، در این صورت

$$Rad(p) = p$$

برهان: می‌دانیم $p \subseteq Rad(p)$ ، از طرفی فرض می‌کنیم $x \in Rad(p)$ ، در

نتیجه $\exists m \in \mathbb{N}$ به طوری که $x^m \in p$ و از آن نتیجه می‌شود $x \in p$.

لم ۲.۱.۱۱. فرض می‌کنیم p و q دو ایده‌آل از حلقه R باشند. در این صورت احکام

زیر معادلند:

$$i. p \subseteq q$$

ii. اگر $x \in p$ آن گاه بعضی از توان های x در q هستند .

iii. اگر $ab \notin q$ و $a \in p$ آن گاه $b \in q$.

برهان. رجوع شود به مرجع [۱۶] صفحه ۱۱.

نتیجه ۲.۱.۱۲. اگر q ، p اولیه باشد و $ab \in q$ و $a \notin p$ ، در این صورت $b \in q$.

لم ۲.۱.۱۳. فرض می کنیم q یک ایده آل اولیه از R باشد . $p := \sqrt{q}$ یک ایده آل اول از R می باشد. در این صورت q یک ایده آل $-p$ اولیه است.

برهان. رجوع شود به مرجع [۱۶] لم ۵.۴.

قضیه ۲.۱.۱۴. فرض می کنیم $q_1, \dots, q_n$ ایده آل های $-p$ اولیه باشند ، در این صورت $q = q_1 \cap \dots \cap q_n$ نیز $-p$ اولیه هستند.

برهان. رجوع شود به صفحه ۱۲ مرجع [۱].

قضیه ۲.۱.۱۵. فرض می کنیم q یک ایده آل از حلقه R باشد ، به طوری که $Rad(q) = m$ یک ایده آل ماکسیمال از R باشد. آن گاه q یک ایده آل $m -$ اولیه از R است. در واقع همه توان های مثبت m ، $m -$ اولیه هستند.

برهان. فرض می‌کنیم b و a عضوهایی از حلقه R باشد، به طوری که $ab \in Q$ و $b \notin \text{Rad}(q)$ از آن جایی که $\text{Rad}(q) = m$ ماکسیمال است و $b \notin m$ ، بنابراین $m + Rb = R$ لذا

$$\text{Rad}(q) + \text{Rad}(Rq) = R.$$

در نتیجه $q + Rb = R$ پس عضوی مانند $d \in q$ و $c \in R$ وجود دارد به طوری که $d + cb = 1$

لذا

$$a = a \cdot 1 = a(d + cb) = ad + c(ab) \in q.$$

بنابراین q ، m - اولیه است.

تعریف ۱.۲.۱۶. حلقه R را نوتری می‌گوییم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

- i. هر مجموعه غیر تهی از ایده آل‌ها در حلقه R یک عضو ماکسیمال داشته باشد.
- ii. هر زنجیر صعودی از ایده آل‌ها در حلقه R ایستا باشد.
- iii. هر ایده آل در حلقه R متناهی باشد.

قضیه ۱۷.۱.۲. فرض می‌کنیم R یک حلقه نوتری و S یک زیر مجموعه بسته ضربی باشد، در این صورت R_S نیز نوتری است.

نتیجه ۱۸.۱.۲. اگر R یک حلقه نوتری و p یک ایده آل اول از حلقه R باشد، در این صورت R_p نیز یک حلقه نوتری است.

قضیه ۱۹.۱.۲. در هر حلقه نوتری هر ایده آل شامل توانی از رادیکال آن است.^۳

برهان. رجوع شود به مرجع [۱۳] قضیه ۸.

تعریف ۲۰.۱.۲. اگر R تنها یک ایده آل ماکسیمال داشته باشد، R را حلقه شبه موضعی می‌گوییم. اگر حلقه نوتری باشد، در این صورت حلقه موضعی است.^۴

تعریف ۲۱.۱.۲. فرض می‌کنیم R یک حلقه و $p \in \text{spec} R$ باشد. بلندی p را با علامت $ht_R p$ یا به اختصار با htp نشان داده و برابر است با سوپریمم طول زنجیری از ایده آل‌های اول R که به p ختم می‌شود و اگر سوپریمم موجود نباشد htp را ∞ تعریف می‌کنیم.

ملاحظه ۲۲.۱.۲. اگر p و q دو ایده آل اول از حلقه R باشد، به طوری که $p \subseteq q$ در این صورت $htp \leq htq$.

^۳ D.G. Northcott

^۴ Local ring