اصول پایه سیستمهای منطقی دیجیتال

مولف

بابک یاری

شابک	:	978-600-04-8689-1:۲۵۰۰۰۰ ریال
شماره کتابشناسی ملی	:	۴۸۹۱۲۲۹
عنوان و نام پدیدآور	:	اصول پایه سیستمهای منطقی دیجیتال/مولف بابک یاری.
مشخصات نشر	:	تهران: بابک یاری، ۱۳۹۶.
مشخصات ظاهری	:	۱۶۲ص.: مصور،جدول، نمودار. ؛ ۲۲×۲۹ س‌م.
موضوع	:	مدارهای منطقی
موضوع	:	Logic circuits
موضوع	:	الکترونیک رقمی
موضوع	:	Digital electronics
رده بندی دیویی	:	۶۲۱/۳۹۵
رده بندی کنگره	:	۱۳۹۶ ۲ی۴۸م/ TK۷۸۶۸
سرشناسه	:	یاری، بابک، ۱۳۵۵ -
وضعیت فهرست نویسی	:	فیپا

اصول پایه سیستمهای منطقی دیجیتال

مولف : بابک یاری

چاپ : هورنو

نوبت چاپ : اول

سال نشر : ۱۳۹۶

شمارگان : ۱۰۰۰ نسخه

قیمت : ۲۵۰۰۰ تومان

شابک : ۱-۸۶۸۹-۰۴-۶۰۰-۹۷۸

فهرست مطالب

سخن نخست

کتاب مدارهای منطقی برای سه مجموعه از مخاطبان گردآوری گشته است . نخست دانشجویان و استادان رشته مهندسی کامپیوتر با تمام گرایشهای زیر مجموعه . دوم دانشجویان واستادان رشته مهندسی برق با تمام گرایشهای مرتبط زیر مجموعه . و سر انجام دانشجویان و استادان رشته مهندسی پزشکی با گرایش بیوالکتریک .

مطالب با مروری بر کاربردهای مدارهای منطقی در انواع سیستمهای دیجیتال امروزی آغاز می شود . سیستمهای اعداد طرح می شود . گیتهای منطقی پایه ومدارهای ترکیبی طرح می شود . ساده سازی جبر بولی تشریح می شود . مدارهای مجتمع و خانواده مدارهای منطقی تشریح می شود . پس از آن روش ساده سازی با جدول کارنو طرح می شود . مدارهای منطقی ترکیبی پرکاربرد و معروف شرح داده می شود همچنین مدارهای منطقی ترتیبی و انواع پرکاربرد و معروف آنها شرح داده می شوند . تحلیل و طراحی مدارهای ترکیبی به همراه مدلهای میلی و مور تشریح می شوند .

در انتها با توجه به سر فصل جدید و بازنگری شده وزارت علوم در مورد زبان توصیف سخت افزاری VHDL مطالبی بدان افزوده گردیده است که با شرح و تشریح مثالهای فراوان ارائه شده اند .

شایسته است دانشجویان مطالب را با پیاده سازی در نرم افزارهای طراحی و شبیه سازی مدارهای منطقی دیجیتال فراگیرند .

این امر به درک و یادگیری عمیق و نزدیک به تجربه آزمایشگاهی و صنعتی این رشته ها کمک بسزایی دارد . به همین علت به پیوست فصل های کتاب راهنمای کار با محیط نرم افزاری الکترونیکز ورک بنچ افزوده شده است که از نرم افزارهای مشابه نیز می توان بهره گرفت .

شایسته است که پروژه ای متناسب با استفاده از نرم افزار(یا به طور مدار الکترونیکی دیجیتال) برای تثبیت یادگیری و با در نظر گرفتن بارم مناسبی از نمره لحاظ شود که در پیوست دوم کتاب مواردی پیشنهادی به عنوان نمونه مطرح شده اند .

هر گونه نظر و پیشنهادی را با پست الکترونیک زیر می توانید در میان بگذارید

Yari.uni.training@gmail.com

بابک یاری – تهران – مهرماه ۱۳۹۶ خورشیدی

فصل اوّل

سیستم‌های دودویی

سیستم اعداد و مبناهای عددی

هدف از این بخش آشنایی با مفاهیم زیر می‌باشد.

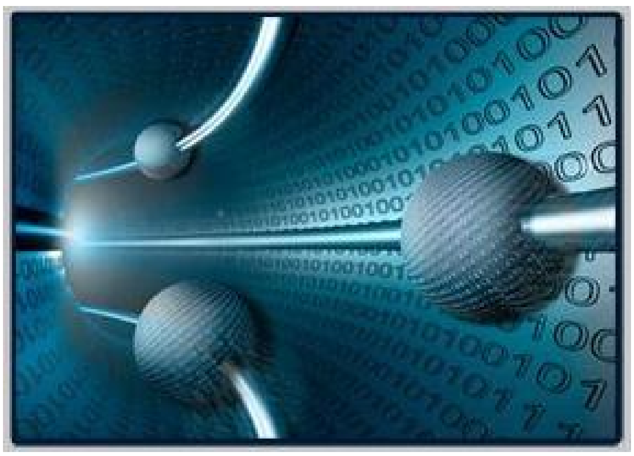
- آشنایی مختصر با سیستم‌های دیجیتال
- آشنایی با سیستم اعداد
- شناخت مبناهای عددی مختلف از جمله مبناهای ۲، ۸، ۱۰، ۱۶
- نحوه تبدیل مبناهای اعداد غیراعشاری به یکدیگر
- نحوه تبدیل مبناهای اعداد اعشاری به یکدیگر

سیستم‌های دیجیتال

مشخصه اصلی سیستم‌های دیجیتال، قدرت آن‌ها در کار با اعداد و ارقام، حروف الفبا و به طور کلی هر مجموعه متشکل از تعداد متناهی از عناصر گسسته اطلاعاتی می‌باشد؛ کامپیوترها نیز دسته خاصی از سیستم‌های دیجیتال هستند و چون کامپیوترهای اولیه برای محاسبات عددی به‌کار می‌رفتند، نام دیجیتال یا رقمی برای آن‌ها گذاشته شده است.

سیستم‌های دیجیتال عمدتاً از مبنای ۲ برای نمایش ارقام، اعداد و انجام اعمال محاسباتی استفاده می‌کنند؛ زیرا پیاده سازی فیزیکی آن‌ها با استفاده از مدارات الکترونیکی و ترانزیستوری از سایر مبناها ساده‌تر است.

بیت یک رقم دودویی است و می تواند دو مقدار ۰ و ۱ را داشته باشد؛ یک کد دودویی بسته به تعداد عناصر مجموعه‌ای که می‌خواهند کدگذاری شوند، می‌تواند از چندین بیت تشکیل شود.



مبناهای عددی – اعداد دودویی

جهت درک هرچه بیش‌تر مبناهای عددی، ابتدا عدد ۶۳۵۴ در مبنای ۱۰ را در نظر می‌گیریم؛ این عدد را می‌توان به شکل زیر نمایش داد:

$$٦\times١٠٠٠+٣\times١٠٠+٥\times١٠+٤\times١$$

این عدد به صورت ضرب سمبل‌های عددی آن در توان‌هایی از ۱۰ نمایش داده شده است و می‌توان آن را به شکل زیر نیز نمایش داد :

$$٦\times١٠^{٣}+٣\times١٠^{٢}+٥\times١٠^{١}+٤\times١٠^{٠}$$

ارزش مکانی : هر رقم بنا به موقعیت خود در یک عدد وزنی دارد. مثلاً ارزش ۶ در ۶۳۵۴ برابر ۱۰۰۰ واحد و ارزش ۵ برابر ۱۰ واحد است.

به طور کلی هر عدد در مبنای مفروض r را به صورت حاصل‌ضرب توان‌های r در سمبل‌های مربوطه‌اش بیان می‌گردد. اعداد اعشاری نیز به همین روش می‌توانند نمایش داده شوند.

سایر مبناها :

سمبل‌های عددی در هر مبنای مفروض r می‌توانند مقادیری بین 0 تا r-1 داشته باشند. به‌عنوان مثال به مبناهای زیر توجه کنید :

در مبنای ۱۰ سمبل ها عبارتند از	۰ , ۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , ۶ , ۷ , ۸ , ۹
در مبنای ۸ سمبل ها عبارتند از	۰ , ۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , ۶ , ۷
در مبنای ۲ سمبل ها عبارتند از	۰ , ۱

قرارداد۱ : مبنای ۱۰ مبنای پایه بوده و برای نمایش اعداد در هر مبنای دیگر، آن‌ها را داخل پرانتز قرار داده و مبنا را به صورت اندیس جلوی آن‌ها می‌نویسیم.

مثال : $(۷۶۰)_{۸}$ $(۲۰۳۴)_{۵}$

قرارداد۲ : برای نمایش سمبل‌ها مبناهای زیر ۱۰ از ارقام استفاده می‌کنیم؛ اما در مبناهای بزرگ‌تر از ۱۰ مانند ۱۶، تا ضریب ۹ از ارقام استفاده می‌کنیم و به جای سایر سمبل‌ها، حروف الفبای لاتین را قرار می‌دهیم؛ بنابراین در مبنای ۱۶ سمبل‌های عددی عبارتند از :

۰،۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸،۹،A،B،C،D،E،F

مبنای ۲ : در این مبنا که معمولا برای نمایش اعداد در سیستم‌های دیجیتال استفاده می‌شود، سمبل‌های عددی فقط می‌توانند مقادیر ۰ و ۱ را اختیار کنند.

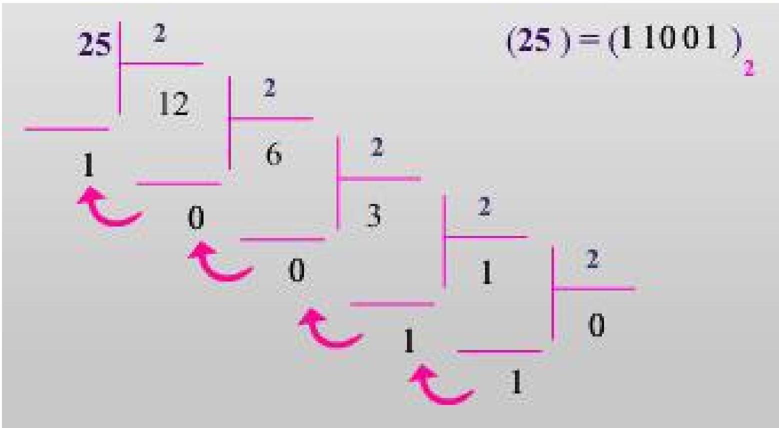
مثال : $(۱۱۰۰۱)_{۲}$ $(۱۰۰۱۱۰۱)_{۲}$

ارزش مکانی بیت‌ها توان‌هایی از دو می باشد. در جدول زیر، توان‌های دو برای اعداد صفر تا ۱۰ مشاهده می‌شوند؛

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

تبدیل مبنای اعداد

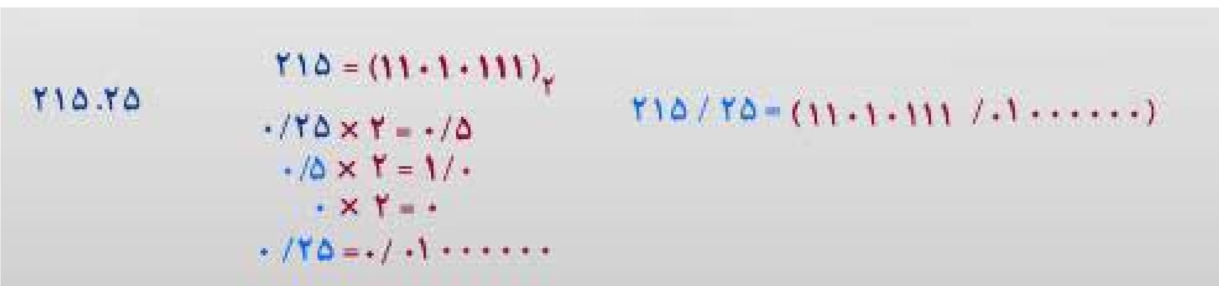
تبدیل از مبنای ۱۰ به سایر مبناها : برای این منظور از تقسیمات متوالی استفاده می‌کنیم. به‌عنوان مثال برای تبدیل عدد ۲۵ در مبنای ۱۰ به معادل آن در مبنای ۲ به شکل زیر دقت نمایید:



همان‌گونه که در شکل نیز مشاهده می‌شود، در هر مرحله عدد را به مبنای خواسته شده تقسیم می‌کنیم. سپس باقیمانده را نگه‌داشته و با خارج قسمت جدید مراحل را تکرار می‌کنیم. شرط اتمام عملیات در این حالت، کوچک‌تر شدن خارج قسمت جدید از مبنای خواسته شده و یا ۰ شدن آن است.

توجه : اولین باقیمانده‌ی حاصل، کم‌ارزش‌ترین رقم در مبنای خواسته شده است.

تبدیل مبنای اعداد اعشاری : برای این منظور، قسمت صحیح عدد را به روش تقسیمات متوالی به مبنای خواسته شده می‌بریم و برای تبدیل قسمت اعشاری، از روش ضرب‌های متوالی استفاده می‌کنیم، به این صورت که در هر مرحله، قسمت اعشاری عدد را در مبنای خواسته شده ضرب می‌کنیم. قسمت صحیح حاصل را نگه داشته و مجدداً قسمت اعشاری را در مبنای مقصد ضرب می‌کنیم. شرط پایان عملیات، ۰ شدن قسمت اعشاری و یا رسیدن به یک دقت مناسب است. به مثال زیر دقت نمایید :



تبدیل از سایرمبناها به ۱۰ : برای این منظور ارزش مکانی رقم‌ها را با هم جمع می کنیم، با توجه به‌این‌که ارزش مکانی رقم‌های اعشاری توان‌های منفی از مبنا هستند. به عبارت دیگر می‌توان عدد داده شده در هر مبنا را به صورت حاصلضرب سمبل های عدد در توان‌های مبنا نوشته و سپس جملات حاصل‌ضرب را با یکدیگر جمع نمود. به مثال زیر توجه کنید :

۰۰۰۱۱۰۰۱

$$۲^{۴} + ۲^{۳} + ۲^{۰} = ۲۵$$

$$(۱۰۱۰/۰۱۱)_{۲} =$$

$$۱×۲ + ۰×۲ + ۱×۲ + ۰×۲ + ۰×۲ + ۱×۲ + ۱×۲ =$$

$$۸ + ۰ + ۲ + ۰ + ۰ + ۱/۴ + ۱/۸ = ۱۰/۳۷۵$$

تبدیل از مبناهای غیر ۱۰ به یکدیگر : روش اصولی وسیستماتیک برای این عمل، تبدیل از مبنای اول به مبنای ۱۰ و سپس از مبنای ۱۰ به مبنای خواسته شده می‌باشد.

تبدیل از مبناهای ۸ و ۱۶ به مبنای ۲ و بالعکس : تبدیل از مبنای ۲ به ۸ و ۱۶ نقش عمده‌ای در کامپیوترهای دیجیتال بازی می‌کند. برای انجام این تبدیل مبناها نیازی به مبنای میانی ۱۰ نیست و می‌توان مستقیماً این عمل را با توجه به رابطه‌ی توانی که بین عدد ۲ با اعداد ۸ و ۱۶ برقرار است ($۸ = ۲^{۳}$ و $۱۶ = ۲^{۴}$)، انجام داد. به عبارت دیگر، هر رقم در مبنای ۸ برابر است با ۳ رقم در مبنای ۲ و هر رقم در مبنای ۱۶ برابر است با ۴ رقم در مبنای ۲.

جداول زیر رابطه میان اعداد در مبناهای ۸، ۱۶، و ۲ را بهتر بیان می‌کنند؛

جدول مبنای ۱۶

مبنای ۱۰	مبنای ۲	مبنای ۱۶
۰	۰۰۰۰	۰
۱	۰۰۰۱	۱
۲	۰۰۱۰	۲
۳	۰۰۱۱	۳
۴	۰۱۰۰	۴
۵	۰۱۰۱	۵
۶	۰۱۱۰	۶
۷	۰۱۱۱	۷
۸	۱۰۰۰	۸
۹	۱۰۰۱	۹
۱۰	۱۰۱۰	A
۱۱	۱۰۱۱	B
۱۲	۱۱۰۰	C
۱۳	۱۱۰۱	D
۱۴	۱۱۱۰	E
۱۵	۱۱۱۱	F

جدول مبنای ۸

مبنای ۸	مبنای ۱۰	مبنای ۲
۰	۰	۰۰۰
۱	۱	۰۰۱
۲	۲	۰۱۰
۳	۳	۰۱۱
۴	۴	۱۰۰
۵	۵	۱۰۱
۶	۶	۱۱۰
۷	۷	۱۱۱

برای تبدیل یک عدد از مبنای ۱۶یا ۸ به مبنای ۲ کافیست از جداول فوق معادل مبنای ۲ هر رقم را پیدا کرده و به جای آن قرار دهیم.

(۵۲۱F)$_{۱۶}$ = (۰۱۰۱.۰۰۱۰.۰۰۰۱.۱۱۱۱)$_{۲}$

(۳۲۷)$_{۸}$ = (۰۱۱.۰۱۰.۱۱۱)$_{۲}$

برای تبدیل یک عدد از مبنای ۲ به مبنای ۸ از دو سمت نقطه اعشار شروع می‌کنیم و به دو سمت راست و چپ بیت ها را به صورت دسته‌های سه‌تایی جدا می‌کنیم. اگر تعداد ارقام اعشار و یا صحیح یک عدد مضربی از ۳ نباشد، به ترتیب به صفرهای کم ارزش بعد از ممیز و صفرهای پر ارزش قبل از ممیز اضافه می‌کنیم. سپس معادل مبنای ۸ هر دسته از بیت‌ها را می‌نویسیم.

برای تبدیل یک عدد از مبنای ۲ به مبنای ۱۶ از دو سمت نقطه اعشار شروع می‌کنیم و به دو سمت راست و چپ بیت ها را به صورت دسته‌های چهارتایی جدا می‌کنیم. اگر تعداد ارقام اعشار و یا صحیح یک عدد مضربی از ۴ نباشد، به ترتیب صفرهای کم ارزش بعد از ممیز و صفرهای پر ارزش قبل از ممیز اضافه می‌کنیم. سپس معادل مبنای ۱۶ هر دسته از بیت‌ها را می‌نویسیم.

$$(11010010/0110101)_2 = (011,010,010/011,010,100)_2 = (322/324)_8$$

$$(1011001010/10011110011)_2 = (0010,1100,1010/1001,1110,0110)_2 = (2CA/9E6)_{16}$$

توجه : مبناهای هشت و شانزده اغلب جهت اختصار و کم شدن حجم اعداد مبنای دو استفاده می‌شوند و کم‌تر به‌عنوان مبنای محاسبات می‌باشند و در ضمن تبدیل مبنای هشت به مبنای شانزده و بر عکس از طریق مبنای دو ساده‌تر خواهد بود.

اعداد دودویی علامت‌دار و حساب دودویی

هدف از این بخش آشنایی با مفاهیم زیر می‌باشد.

- آشنایی با متمم‌ها (متمم‌ها)
- طرز متمم گرفتن از اعداد
- اعداد دودویی علامت دار
- انجام اعمال حسابی برای اعداد دودویی علامت دار
- خطای سرریز و تشخیص آن
- خلاصه درس
- آزمون

متمم‌ها(متمم‌ها)

متمم‌ها در کامپیوترهای دیجیتال برای ساده کردن برخی عملیات مانند عمل تفریق و عملیات منطقی به کار می‌روند. با بهره‌گیری از متمم‌ها، پیاده سازی سخت‌افزاری عملیات تفریق در کامپیوترها به سادگی و کمک به مدارات جمع‌کننده امکان‌پذیر خواهد بود.

در هر مبنای مفروض r دو نوع متمم برای هر عدد تعریف می‌شود :

۱. متمم مبنا (متمم r)

۲. متمم مبنای کاهش یافته (متمم r-1)

فرمول کلی متمم‌ها : عدد N دارای n رقم صحیح و m رقم اعشار در مبنای r مفروض است. در اینصورت :

مکمل r-1 عدد N ← $r^n - N - r^m$

مکمل r عدد N ← $r^n - N$

راه حل ساده‌تر : برای به دست آوردن متمم‌ها در مبنای ۲ می‌توان به‌صورت‌های زیر عمل نمود :

متمم ۱ یک عدد در مبنای ۲ : تمام بیت های عدد را از ۱ کم می‌کنیم؛ به عبارت دیگر تمام بیت های ۰ را به ۱ وتمام بیت های ۱ را به ۰ تبدیل می‌کنیم.

متمم ۲ یک عدد در مبنای ۲ : از سمت راست عدد شروع می‌کنیم. صفرهای کم ارزش و اولین یک کم ارزش را دست‌نخورده باقی می‌گذاریم. سپس تمام بیت‌های ۰ را به ۱ وتمام بیت های ۱ را به ۰ تبدیل می‌کنیم.

از میان مبناها مبحث متمم‌ها در مبنای ۲ اهمیت بیش‌تری دارد و در ادامه با مثال‌هایی به نحوه به‌دست‌آوردن متمم‌ها در این مبنای ۲ می‌پردازیم.

مثال:

$11001001 \xrightarrow{\text{متمم ۲}} 00110111$

$11110000 \xrightarrow{\text{متمم ۲}} 00010000$

$00000000 \xrightarrow{\text{متمم ۲}} 00000000$

$10000000 \xrightarrow{\text{متمم ۲}} 10000000$

$10101110 \xrightarrow{\text{متمم ۲}} 01010010$

$11111111 \xrightarrow{\text{متمم ۲}} 00000001$

اعداد دودویی علامت‌دار

اعداد صحیح مثبت و صفر را می‌توان با اعداد بی‌علامت نشان داد. اما برای ذخیره اعداد منفی بر روی کامپیوترها، روش های مختلفی پیشنهاد شده است. ۳ روش برای نمایش و ذخیره اعداد دودویی در کامپیوترها وجود دارد :

۱. روش مقدار- علامت دار : در این روش، چپ‌ترین بیت برای تعیین علامت استفاده می‌شود که به آن (بیت علامت) می‌گویند؛ در سایر بیت‌ها قدر مطلق عدد نمایش داده می‌شود. این سیستم عدد را با تغیر علامتش منفی می‌کند. اما دو روش دیگر، عدد را با متمم‌سازی منفی می‌کنند.

۲. روش متمم ۱ علامت دار : در این روش، برای منفی کردن یک عدد، ابتدا معادل مثبت آن را نوشته و سپس از آن متمم ۱ می‌گیریم.

۳. روش متمم ۲ علامت دار : در این روش، برای منفی کردن یک عدد، ابتدا معادل مثبت آن را نوشته و سپس از آن متمم ۲ می‌گیریم.

توجه ۱ : در تمامی روش‌های نمایش اعداد دودویی علامت‌دار، اعداد مثبت به یک شکل نمایش داده می‌شوند؛ تفاوت در نحوه نمایش اعداد منفی است.

توجه ۲ : در تمامی روش های نمایش اعداد دودویی علامت‌دار، چپ‌ترین بیت به عنوان بیت علامت استفاده می‌شود. این بیت در تمام اعداد مثبت برابر صفر و در تمام روش‌ها برای اعداد منفی برابر ۱ است.

مثال:

نمایش اعداد ۹+ و ۹- در سیستمهای نمایش مختلف در ۸ بیت :

عدد ۹+ در هر ۳ سیستم به شکل زیر نمایش داده می‌شود.

۰۰۰۰۱۰۰۱

عدد ۹- در هر ۳ سیستم به شکل زیر نمایش داده می شود

نمایش مقدار- علامت دار عدد ۹-: ۱۰۰۰۱۰۰۱

نمایش مکمل ۱ علامت دار عدد ۹-: ۱۱۱۱۰۱۱۰

نمایش مکمل ۲علامت دار عدد ۹-: ۱۱۱۱۰۱۱۱

از میان روش‌های فوق، روش اول در کامپیوترها کاربرد ندارد. متمم ۱ نیز مشکلاتی به بار می‌آورد و بیش‌تر برای اعمال منطقی مفید است. معمولا در اکثر سیستم‌های کامپیوتری از سیستم نمایش متمم ۲ برای نمایش اعداد علامت‌دار و محاسبات استفاده می‌شود.

قرارداد : از این پس فرض بر این است که اعداد علامت‌دار به روش متمم ۲ نمایش داده می‌شوند.

عملیات حسابی : معمولاً برای انجام عمل تفریق در مبنای ۲، از عمل جمع استفاده می شود؛ زیرا پیاده‌سازی سخت‌افزاری مدارات تفریق کننده به صرفه نمی‌باشد؛ از طرفی انجام عملیات تفریق به روش متمم ۲ دارای سخت‌افزار ساده‌تری است. بنابراین به کمک متمم‌ها و عمل جمع، می‌توان تفریق را انجام داد.

تفریق اعداد دودویی بدون علامت : برای تفریق دو عدد بدون علامت M-N ابتدا متمم ۲ عدد N را بدست آورده و سپس با M جمع می‌کنیم.

اگر $M \geq N$ باشد، عمل جمع یک رقم نقلی انتهایی تولید می‌کند که نشانگر مثبت بودن حاصل است و باید چشم‌پوشی شود؛

اگر M<N باشد، هیچ رقم نقلی انتهایی تولید نشده و نشانگر این است که حاصل، یک عدد منفی به صورت متمم ۲ می‌باشد.

مثال:

با فرض دو عدد دودویی $x = 84$ $(x = 1010100)$ و $y = 67$ $(y = 1000011)$ تفریق‌های زیر را به روش متمم ۲ انجام دهید:

(الف) X-Y ، (ب) Y-X

جواب (الف):

عدد x را با متمم ۲ عدد y جمع می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} x = 1010100 \\ +\ 0111101 \\ \hline 0010001 \end{array}$$

رقم نقلی را حذف می‌کنیم. رقم نقلی ← 1

$x - y = 0010001 = 17$

جواب (ب):

عدد y را با متمم ۲ عدد x جمع می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} 1000011 \\ +\ 0101100 \\ \hline 1101111 \end{array}$$

رقم نقلی انتهایی وجود ندارد و بیت سمت چپ نتیجه برابر ۱ است. پس حاصل یک عدد منفی می‌باشد.
از حاصل متمم ۲ می‌گیریم. برابر ۱۷ خواهد شد. در نتیجه عدد نتیجه ۱۷- بوده است.

$$\underset{-۱۷}{1101111} \xrightarrow{\text{متمم ۲}} \underset{+۱۷}{0010001}$$

جمع اعداد دودویی علامت‌دار : جمع دو عدد دودویی علامت‌دار که در آن، اعداد منفی به فرم متمم ۲ هستند، از جمع تمام بیت های دو عدد منجمله بیت‌های علامت آن‌ها حاصل می‌شود و از رقم نقلی حاصل از بیت علامت باید چشم‌پوشی شود.

مثال:

ابتدا اعداد ۶+ و ۱۳+ را در ۸ بیت نمایش داده و سپس از روی اعداد حاصل، اعداد ۶- و ۱۳+ را نمایش دهید. در ادامه چهار عمل جمع زیر را انجام دهید.

$+13 : 00001101 \xrightarrow{\text{متمم ۲}} -13 : 11110011$

$+6 : 00000110 \xrightarrow{\text{متمم ۲}} -6 : 11111010$

$$\begin{array}{r} 11111010 \\ +\ 00001101 \\ \hline \cancel{1}\ 00000111 \end{array} \qquad \begin{array}{r} (-6) \\ +(+13) \\ \hline +7 \end{array}$$

نقلی را نادیده می‌گیریم.

$$\begin{array}{r} 00000110 \\ +\ 00001101 \\ \hline 00010011 \end{array} \qquad \begin{array}{r} (+6) \\ +(+13) \\ \hline +19 \end{array}$$

حاصل یک عدد مثبت می‌باشد.

$$\begin{array}{r} 00000110 \\ +11110011 \\ \hline 11111001 \end{array} \qquad \begin{array}{r} (+6) \\ +(-13) \\ \hline -7 \end{array}$$

حاصل یک عدد منفی است زیرا بیت سمت چپ برابر ۱ است که این عدد ۷- می‌باشد.

$$\begin{array}{r} 11111010 \\ +11110011 \\ \hline \cancel{1}\ 11101101 \end{array} \qquad \begin{array}{r} (-6) \\ +(-13) \\ \hline -19 \end{array}$$

نقلی را نادیده می‌گیریم.
حاصل عدد ۱۹- به فرم متمم ۲ می‌باشد.

تمرین : عملیات زیر را در مبنای ۲ انجام دهید :

-96 + 70	-96 + (-70)	96 + (-70)	96 + 70

تفریق اعداد دودویی علامت‌دار : تفریق دو عدد دودویی علامت‌دار که در آن، اعداد منفی به فرم متمم ۲ هستند، به این صورت انجام می‌شود : متمم ۲ عدد دوم را به دست آورده و حاصل را به عدد اول می‌افزاییم. در این حالت نیز از رقم نقلی حاصل از بیت علامت باید چشم‌پوشی شود.

نحوه انجام این عمل با روابط زیر بیان می‌شود:

$$(\pm A) - (+B) = (\pm A) + (-B)$$

$$(\pm A) - (-B) = (\pm A) + (+B)$$

خطای سرریز (OverFlow):

هرگاه دو عدد n رقمی با هم جمع شوند و حاصل جمع n+1 رقم را اشغال کند، سرریز رخ خواهد داد. سرریز می‌تواند در جمع دو عدد دودویی علامت‌دار یا بدون علامت رخ دهد؛ در جمع دو عدد بی علامت، یک سرریز از نقلی با ارزش‌ترین مکان تشخیص داده می‌شود.

سرریز در جمع اعداد علامت‌دار زمانی رخ می‌دهد که حاصل جمع دو عدد منفی، مثبت یا حاصل جمع دو عدد مثبت، منفی شود که در این حالت رقم نقلی انتهایی هیچ سرریزی را مشخص نمی‌کند. سرریز زمانی که یکی از اعداد مثبت و دیگری منفی باشد، رخ نخواهد داد.

نحوه تشخیص سرریز در جمع اعداد دودویی علامت‌دار : وضعیت سرریز را می‌توان با وجود رقم نقلی به بیت علامت و نقلی خروجی از بیت علامت مشاهده کرد. اگر این دو نقلی یکی نباشند، یک سرریز رخ داده است؛ به این معنی که علامت نتیجه عوض شده است. مثال زیر یک نمونه خطای سرریز را نشان می‌دهد:

۷۵ + ۷۵ =

$$(۰۱۰۰۱۰۱۱)_{۲} + (۰۱۰۰۱۰۱۱)_{۲} = (۱۰۰۱۰۱۱۰)_{۲}$$

در مثال فوق، بیت یکِ سمت چپ نشانگر این است که عدد حاصل منفی است، درصورتی که دو عدد مثبت با هم جمع شده است.

راه حل برطرف کردن خطای سرریز افزایش تعداد بیت‌های سیستم است. برای مثال عدد بالا را ده بیتی می‌کنیم تا مثبت شود ؛ یعنی بیت سمت چپ آن صفر می‌شود.

۷۵ + ۷۵ =

$$(۰۰۰۱۰۰۱۰۱۱)_{۲} + (۰۰۰۱۰۰۱۰۱۱)_{۲} = (۰۰۱۰۰۱۰۱۱۰)_{۲}$$

کدهای دودویی

هدف از این بخش آشنایی با مفاهیم زیر می‌باشد.

- آشنایی با کدهای دودویی
- انواع کدهای دودویی
- خواص کدهای دودویی
- آشنایی با مفاهیم تشخیص خطا
- آشنایی با بیت توازن و توان زوج و فرد
- خلاصه درس
- آزمون

کدهای دودویی

یک کد دودویی n بیتی، گروهی متشکل از n بیت است که ۲^n ترکیب ممکن از یک‌ها و صفرها را داراست و هر ترکیب یک عنصر از مجموعه کد شده را نمایش می‌دهد.

بنابراین، حداقل تعداد بیت‌های لازم برای ۲^n کد مجزا، برابر n است. همچنین، برای مجموعه‌هایی که تعداد عناصر آنها دقیقاً توانی از ۲ نمی‌باشد، برای یافتن مقدار n باید از رابطه زیر استفاده نمود :

$$2^{n-1} < m \leq 2^n$$

در رابطه فوق، m تعداد عناصر مجموعه ذکر شده می‌باشد. برای مثال، جهت کدگذاری مجموعه حروف الفبای لاتین به ۵ بیت نیاز داریم؛ زیرا :

$$۲^۴ < ۲۶ < ۲^۵ \longrightarrow ۱۶ < ۲۶ < ۳۲$$

انواع کدهای دودویی :

از آن‌جایی که بسیاری از انسان‌ها به سیستم دهدهی عادت دارند، بهتر است که اجرای همه محاسبات به دودویی و سپس تبدیل نتایج دودویی به دهدهی انجام شود. بنابراین در این روش باید اعداد دهدهی را در کامپیوتر ذخیره کرده تا بتوانند به اعداد دودویی تبدیل شوند. از طرفی کامپیوتر می‌تواند فقط با ارقام دودویی کار کند. بنابرین ارقام دهدهی با کدی مرکب از صفر و یک نمایش داده می‌شوند.

کدهای دودویی برای ارقام دهدهی به حداقل ۴ بیت برای هر رقم نیاز دارند. بـا ایجـاد ۱۰ ترکیـب مختلـف در ۴ بیت، کدهای دهدهی مختلف را می‌توان ایجاد کرد که هر کد تنها ۱۰ ترکیـب بیتـی از ۱۶ ترکیـب ممکـن در ۴ بیت را به کار می‌برد.

یکی از پرکاربردترین کدهای دهدهی مورد استفاده برای نمـایش ارقـام دهـدهی، کـد **BCD** اسـت. **BCD:(Binary Coded Decimal)** به معنای دهدهی کد شده به دودویی می‌باشد. کد **BCD** معادل ارقام صفر تا نـه در جـدول زیـر مشاهده می‌شود؛

دهدهی	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
BCD	۰۰۰۰	۰۰۰۱	۰۰۱۰	۰۰۱۱	۰۱۰۰	۰۱۰۱	۰۱۱۰	۰۱۱۱	۱۰۰۰	۱۰۰۱

توجه ۱ : اعداد **BCD** اعداد دهدهی هستند، نه اعداد دودویی؛ هرچنـد کـه آنهـا در ساختارشـان از بیـت اسـتفاده می‌کنند. تنها تفاوت بین یک عدد دهدهی و **BCD** در این است که در اعداد دهدهی از سمبل‌های صفر تا نـه و در اعداد **BCD** از سمبل‌های **0000**،**0001**،...،**1001** استفاده می‌شود.

توجه ۲ : هرگاه عدد دهدهی در **BCD** بین صفر تا نه باشد، با عدد دودویی‌اش معادل است.

تبدیل اعداد دهدهی به BCD : برای این کار از جدول کدهای **BCD** ، معادل **BCD** هـر یـک از ارقـام عـدد را بـه دست آورده و کنار هم قرار می‌دهیم. **برای** نمایش یک عدد k رقمی در **BCD** به **4k** بیت نیاز داریم.

مثال :

$(236)_{10} = (0010,0011,0110)_{BCD}$

$(4185)_{10} = (0100,0001,1000,0101)_{BCD}$

به مثال‌های زیر توجه نمایید:

$12 \xrightarrow{BCD} 00010010$

$6 \xrightarrow{BCD} 0110$

$2948 \xrightarrow{BCD} 0010100101001000$

$753 \xrightarrow{BCD} 011101010011$

سایر کدهای دهدهی : در جدول زیر کد BCD به همراه ۳ کد دهدهی دیگر نشان داده شده‌اند. همانگونه که در جدول نیز مشخص است، در هر یک از کدها ۶ ترکیب بیتی به کار نرفته وجود دارد.

دهدهی	BCD	EX-3	8 4-2-1	2 4 2 1
0	0000	0011	0000	0000
1	0001	0100	0111	0001
2	0010	0101	0110	0010
3	0011	0110	0101	0011
4	0100	0111	0100	0100
5	0101	1000	1011	1011
6	0110	1001	1010	1100
7	0111	1010	1001	1101
8	1000	1011	1000	1110
9	1001	1100	1111	1111

حال با مثالی، نحوه نمایش یک عدد را در هر یک از کدهای فوق مشخص می‌کنیم؛

$$
\begin{aligned}
792 &= (0111\ \ 1001\ \ 0010)_{BCD} \\
&= (1010\ \ 1100\ \ 0101)_{EX\text{-}3} \\
&= (1001\ \ 1111\ \ 0110)_{8\,4\text{-}2\text{-}1} \\
&= (1101\ \ 1111\ \ 0010)_{2\,4\,2\,1}
\end{aligned}
$$

کدهای وزن‌دار : در یک کد وزن‌دار، به هر مکان از بیت‌ها وزنی اختصاص داده شده است. کدهای **BCD**، ۲۴۲۱ و ۱-۲-۸۴ از جمله کدهای وزین هستند.

کدهای خود متمم : در این کدها متمم ۹ عدد دهدهی مستقیماً از تغییر صفرها به یک و یک‌ها به صفر در کد حاصل می‌شود. کدهای ۲۴۲۱ و افزونی ۳ **(EX-3)** نمونه‌هایی از کدهای خود متمم هستند.

کد گِری (Gray Code) : گاهی اوقات بهتر است برای نمایش داده ها از کد گِری استفاده شود. مزیت کد گِری نسبت به کد دودویی این است که از هر کد به کد بعدی فقط یک بیت تغییر می‌یابد. کد گِری در کاربردهایی مورد استفاده است که رشته اعداد دودویی ممکن است در طول انتقال یا تبدیل از یک عدد به دیگری خطایی

تولید کنند. همچنین در جایی که شماره‌ها پشت سر هم ارسال شوند، این کد استفاده خوبی برای کنترل صحت اطلاعات خواهد داشت. کد گِرِی ۴ بیتی معادل اعداد صفر تا ۱۵ در جدول زیر مشاهده می‌شود؛

دهدهی	کد گِرِی
0	0000
1	0001
2	0011
3	0010
4	0110
5	0111
6	0101
7	0100
8	1100
9	1101
10	1111
11	1110
12	1010
13	1011
14	1001
15	1000

کدهای تشخیص خطا : برای تشخیص خطاها در مخابره یا پردازش داده‌ها، روش‌های مختلفی به کار می‌روند. یکی از این روش‌ها، استفاده از بیت توازن است؛ بیت توازن، بیتی اضافی است که حاوی پیامی بوده و طی آن تعداد یک‌های کل، زوج یا فرد خواهد شد.

بیت توازن (Parity bit) : بیت توازن، بیتی اضافی است که حاوی پیامی بوده و طی آن امکان کنترل خطا را به کد می دهد؛ یعنی اگر اشتباهاً یک به صفر یا برعکس تبدیل شده باشد قابل تشخیص خواهد بود. این بیت بیتی است که به کد اضافه می شود و تعداد یک‌ها را زوج یا فرد می‌کندکه به آن بیت توازن زوج یا فرد می‌گوییم. در نتیجه ما دو نوع توازن زوج و فرد خواهیم داشت؛

توازن زوج (Even Parity) : بیت توازن به نحوی صفر یا یک می‌شود که تعداد کل یک ها در پیام ارسالی همراه با بیت توازن، عدد زوجی شود.

توازن فرد (Odd Parity) : بیت توازن به نحوی صفر یا یک می‌شود که تعداد کل یک‌ها در پیام ارسالی همراه با بیت توازن، عدد فردی شود. جدول زیر نحوه تولید بیت‌های توازن زوج و فرد را برای کدهای ۴ بیتی نشان می-دهد؛

	پریتی فرد	پریتی زوج
کد ۴ بیتی	Po	Pe
0000	1	0
0001	0	1
0010	0	1
0011	1	0
0100	0	1
0101	1	0
0110	1	0
0111	0	1
1000	0	1
1001	1	0
1010	1	0
1011	0	1
1100	1	0
1101	0	1
1110	0	1
1111	1	0

فصل دوّم

جبر بول و گیت‌های منطقی

اصول، تئوری‌ها و خواص جبر بول

هدف از این بخش آشنایی با مفاهیم زیر می‌باشد.

- تعریف منطق دودویی، متغیرهای دودویی و عملیات منطقی
- درک ارتباط میان منطق دودویی و جبر بول دو ارزشی
- تعریف جبر بول و اصول هانتینگتون
- تفاوت‌های عمده میان جبر بول و جبر اعداد حقیقی
- تعریف جبر بول دو ارزشی
- اصول و تئوری‌های جبر بول واثبات آن‌ها
- روش‌های ساده‌سازی توابع منطقی

منطق دودویی : منطق دودویی شامل متغیرهای دودویی و عملیات منطقی است. متغیرهای دودویی با حروف الفبایی مانند A،B،C،x،y،z،... نامگذاری می‌شوند و هر متغیر فقط دو مقدار 0 و 1 می‌تواند داشته باشد. سه نوع عملیات منطقی اصلی نیز وجود دارند که عبارتند از : AND ، OR و NOT

۱. **AND :** به وسیله یک "." نمایش داده می‌شود و $x.y = z$ به معنی "z برابر با x AND y است" می‌باشد. در عمل AND، $z=1$ است اگر و فقط اگر $x=1$ و $y=1$ باشند. در غیر این‌صورت $z=0$ خواهد بود .

۲. **OR :** به وسیله یک "+" نمایش داده می‌شود و $x+y = z$ به معنی "z برابر با x OR y است" می‌باشد. در عمل OR، $z=1$ است اگر $x=1$ یا $y=1$ و یا هر دو برابر 1 باشند. در غیر این‌صورت $z=0$ خواهد بود .

۳. **NOT :** عمل NOT یا متمم با یک علامت پریم یا یک خط بار نشان داده می‌شود و $z = x'$ به معنی "z برابر با NOT x است" می‌باشد. اگر $x=0$ باشد، $z=1$ و اگر $x=1$ باشد، $z=0$ خواهد شد.

در بخش‌های بعدی و مبحث جبر بول، عملیات منطقی و نحوه تعریف آن‌ها به طور مفصل شرح داده خواهد شد. منطق دودویی با تعریف ارائه شده در بالا، معادل با جبری به نام جبر بول است. منطق دودویی به روشی غیر مستدل تعریف شده است؛ اما در ادامه جبر بول به روش مستدل ریاضی بنا خواهد گردید. بیان غیر مستدل منطق دودویی، برای کاربرد جبر بول در مدارهای گیتی مفید است؛ اما روش مستدل جبر بول برای بیان و ایجاد تئوری‌ها و خواص سیستم‌های جبری به کار می‌رود.

جبر بول : جبر بول را می‌توان مانند هر سیستم ریاضی، به وسیله‌ی مجموعه‌ای از عناصر، یک مجموعه از الگوها و تعدادی اصول اثبات نشده یا بدیهیات تعریف نمود. پیش از پرداختن به تعریف جبر بول، ابتدا به یک سری تعاریف مقدماتی می پردازیم.

تعریف مجموعه : یک مجموعه از عناصر، کلکسیونی از اشیاء است که دارای خواص مشترکی باشند. در مجموعه‌ها دو تعریف عضویت و عدم عضویت مطرح است.

تعریف عملگر دودویی : یک عملگر دودویی روی یک مجموعه از عناصر مانند S، قانونی است که به هر جفت از عناصر S، یک عنصر منحصر به فرد از S را تخصیص دهد.

اصول به کار رفته یک سیستم ریاضی : مهم‌ترین اصول به کار رفته در فرموله کردن ساختارهای جبری عبارتند از :

- بسته بودن
- اصل شرکت‌پذیری
- اصل جابجایی
- عنصر شناسه
- معکوس
- اصل توزیع‌پذیری

تعریف جبر بول : جبر بول یک ساختار جبری است که با عناصر مجموعه B، همراه با دو عملگر دودویی (+) و (.) تعریف می‌شود به شرطی که اصول شش‌گانه زیر که به اصول هانتینگتون معروفند، در آن معتبر باشد :

۱	مجموعه نسبت به عملگر (+) بسته باشد.	مجموعه نسبت به عملگر (.) بسته باشد.
۲	یک عنصر شناسه ۰ برای (+) وجود داشته باشد.	یک عنصر شناسه ۱ برای (.) وجود داشته باشد.
۳	مجموعه نسبت به (+) دارای خاصیت جابجایی باشد. $X+Y=Y+X$	مجموعه نسبت به (.) دارای خاصیت جابجایی باشد. $X.Y=Y.X$
۴	(.) نسبت به (+) توزیع‌پذیر است. $x.(y+z) = (x.y) + (x.z)$	(+) نسبت به (.) توزیع‌پذیر است $x+(y.z) = (x+y) . (x+z)$
۵	برای هر عنصر عضو، عنصری مثل عضو وجود دارد به نحوی که :	
	A) $x + x' = 1$	B) $x . x' = 0$
۶	حداقل دو عنصر X و Y عضو وجود دارد به نحوی که : $x \neq y$	