





# روش طراحی و تحلیل سیستم‌های ارتعاشی در کنترل دیجیتال

مولفان :

**دکتر وهاب طاهری**

(دکترای مهندسی مکانیک-کامپوزیت)

**دکتر حسین اردستانی**

(دکترای مهندسی مکانیک-دینامیک و ارتعاشات)

انتشارات ارسطو

(چاپ و نشر ایران)

۱۴۰۱

سرشناسه : طاهری، وهاب، ۱۳۶۴ -

عنوان و نام پدیدآور: روش طراحی و تحلیل سیستم‌های ارتعاشی در کنترل دیجیتال /  
مولفان دکتر وهاب طاهری، دکتر حسین اردستانی.

مشخصات نشر: ارسطو (سامانه اطلاع رسانی چاپ و نشر ایران)، ۱۴۰۱.  
مشخصات ظاهری: ۲۶۳ص.

شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۴۳۲-۹۲۴-۸

وضعیت فهرست نویسی: فیبا

موضوع: سیستم‌های ارتعاشی

موضوع: کنترل دیجیتال

شناسه افزوده: اردستانی، حسین، ۱۳۶۷ -

رده بندی کنگره: PIR۸۳۴۳

رده بندی دیویی: ۸۱/۲۶

شماره کتابشناسی ملی: ۸۹۱۵۳۹۱

اطلاعات رکورد کتابشناسی: فیبا

نام کتاب: روش طراحی و تحلیل سیستم‌های ارتعاشی در کنترل دیجیتال

مولفان: دکتر وهاب طاهری - دکتر حسین اردستانی

ناشر: ارسطو (سامانه اطلاع رسانی چاپ و نشر ایران)

صفحه آرای، تنظیم و طرح جلد: پروانه مهاجر

تیراژ: ۱۰۰۰ جلد

نوبت چاپ: اول - ۱۴۰۱

چاپ: مدیران

قیمت: ۱۰۶۰۰۰ تومان

فروش نسخه الکترونیکی - کتاب رسان:

<https://chaponashr.ir/ketabresan>

شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۴۳۲-۹۲۴-۸

تلفن مرکز پخش: ۰۹۱۲۰۲۳۹۲۵۵

[www.chaponashr.ir](http://www.chaponashr.ir)



انتشارات ارسطو



# فهرست مطالب

| پ  | پیش‌گفتار                                             |
|----|-------------------------------------------------------|
| ۱  | ۱ معرفی                                               |
| ۱  | ۱.۱ مزایای سیستم‌های کنترل دیجیتال . . . . .          |
| ۲  | ۲.۱ ساختار سیستم‌های کنترل دیجیتال . . . . .          |
| ۱۳ | ۳.۱ روش‌های طراحی کنترل‌کننده‌های دیجیتال . . . . .   |
| ۱۵ | ۴.۱ علائم و قراردادها . . . . .                       |
| ۱۸ | ۵.۱ تمرین‌ها . . . . .                                |
| ۱۹ | ۶.۱ پروژه‌ها . . . . .                                |
| ۲۵ | ۲ مدل‌های فرکانسی و زمانی سیگنال‌ها و سیستم‌های گسسته |
| ۲۵ | ۱.۲ مروری بر توابع مختلط تحلیلی . . . . .             |
| ۲۶ | ۱.۱.۲ قضیه کوشی . . . . .                             |
| ۲۶ | ۲.۱.۲ بسط لوران . . . . .                             |
| ۲۸ | ۳.۱.۲ قضیه‌ی باقی‌مانده‌ها . . . . .                  |
| ۲۹ | ۴.۱.۲ توسعه‌بخشی تحلیلی . . . . .                     |
| ۳۰ | ۲.۲ تبدیل $z$ . . . . .                               |
| ۳۲ | ۳.۲ خواص و قضایای اصلی تبدیل $z$ . . . . .            |
| ۳۷ | ۱.۳.۲ معکوس تبدیل $z$ . . . . .                       |
| ۳۷ | ۱.۱.۳.۲ روش تقسیم . . . . .                           |

|     |                                                          |         |
|-----|----------------------------------------------------------|---------|
| ۳۸  | ..... روش عددی                                           | ۲۰۱.۳.۲ |
| ۳۹  | ..... روش تفکیک کسر                                      | ۳۰۱.۳.۲ |
| ۴۳  | ..... روش انتگرال مختلط                                  | ۴۰۱.۳.۲ |
| ۴۷  | ..... حل معادلات فضای حالت گسسته                         | ۴۰۲     |
| ۴۷  | ..... پاسخ با ورودی صفر                                  | ۱۰۴.۲   |
| ۴۷  | ..... پاسخ با ورودی ضربه و شرایط اولیه صفر               | ۲۰۴.۲   |
| ۴۸  | ..... پاسخ با ورودی دلخواه و شرایط اولیه صفر             | ۳۰۴.۲   |
| ۵۰  | ..... پاسخ کلی                                           | ۴۰۴.۲   |
| ۵۲  | ..... ماتریس سیستم برای سیستم‌های گسسته                  | ۵۰۲     |
| ۵۸  | ..... تبدیل ۸                                            | ۶۰۲     |
| ۶۱  | ..... مدل پیوسته‌ی ضربه‌ای                               | ۷۰۲     |
| ۶۲  | ..... رابطه‌ی بین سیگنال‌های گسسته و معادل ضربه‌ای آن‌ها | ۸۰۲     |
| ۶۷  | ..... پاسخ فرکانسی برای مدل‌های ضربه‌ای و گسسته          | ۹۰۲     |
| ۷۷  | <b>۳ نمونه‌گیری و بازسازی سیگنال‌های پیوسته</b>          |         |
| ۷۷  | ..... نمونه‌بردار آرمانی                                 | ۱۰۳     |
| ۸۰  | ..... نگه‌دارنده‌ی آرمانی                                | ۲۰۳     |
| ۸۱  | ..... بازسازی سیگنال‌های نمونه‌گیری شده                  | ۳۰۳     |
| ۸۴  | ..... پدیده‌ی کم‌نمایی فرکانسی                           | ۴۰۳     |
| ۸۵  | ..... پدیده‌ی کم‌نمایی فرکانسی از منظر صفحه $s$          | ۵۰۳     |
| ۸۵  | ..... رابطه‌ی بین صفحه‌های $s$ و $z$                     | ۱۰۵.۳   |
| ۸۸  | ..... فیلترهای ضد کم‌نمایی فرکانس                        | ۶۰۳     |
| ۹۰  | ..... مراحل طراحی فیلتر بسل                              | ۷۰۳     |
| ۹۲  | ..... نگه‌دارنده‌ی مرتبه صفر                             | ۸۰۳     |
| ۱۰۰ | ..... تمرین‌ها                                           | ۹۰۳     |
| ۱۰۵ | <b>۴ گسسته سازی سیستم‌های تحت کنترل</b>                  |         |
| ۱۰۵ | ..... روش مبتنی بر پاسخ ضربه                             | ۱۰۰.۴   |
| ۱۰۷ | ..... روش انتگرال مختلط                                  | ۲۰۰.۴   |
| ۱۱۱ | ..... تلفیق سیستم‌های پیوسته و گسسته در ساختار حلقه‌بسته | ۱۰۴     |
| ۱۱۳ | ..... تاثیر اغتشاشات پیوسته بر سیستم‌های کنترل دیجیتال   | ۲۰۴     |
| ۱۱۴ | ..... پاسخ فرکانسی مدل گسسته‌ی سیستم تحت کنترل           | ۳۰۴     |

|     |                                                                                    |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------|
| ۱۱۹ | ۵ گسسته سازی زمانی سیستم‌های تحت کنترل                                             |
| ۱۱۹ | ۱.۵ مدل زمانی سیستم تحت کنترل                                                      |
| ۱۲۱ | ۲.۵ گسسته‌سازی در شکل فضای حالت                                                    |
| ۱۲۳ | ۳.۵ الگوریتم‌های محاسبه‌ی $A_d$                                                    |
| ۱۲۵ | ۴.۵ الگوریتم‌های محاسبه‌ی تقریبی $B_d$                                             |
| ۱۲۷ | ۵.۵ الگوریتم محاسبه‌ی دقیق $A_d$ و $B_d$                                           |
| ۱۳۳ | ۶.۵ اثر تأخیر در ورودی                                                             |
| ۱۳۷ | ۷.۵ تأخیر زمانی بزرگ‌تر از $h$                                                     |
| ۱۴۳ | ۶ گسسته‌سازی کنترل‌کننده‌ها                                                        |
| ۱۴۶ | ۱.۶ استفاده‌ی مستقیم از کنترل‌کننده‌ی پیوسته                                       |
| ۱۴۹ | ۲.۶ گسسته‌سازی سیستم انتگرالی با روش‌های تقریب عددی                                |
| ۱۵۱ | ۳.۶ گسسته‌سازی کنترل‌کننده‌ها با روش‌های تقریب عددی                                |
| ۱۵۲ | ۴.۶ الگوریتم فضای حالت برای روش تاستین                                             |
| ۱۵۴ | ۵.۶ گسسته‌سازی با روش نگاشت صفرها و قطب‌ها                                         |
| ۱۵۵ | ۶.۶ الگوریتم فضای حالت برای روش MPZ                                                |
| ۱۶۰ | ۷.۶ اهمیت استفاده از فیلتر ضد کم‌نمایی فرکانس در پیاده‌سازی دیجیتال کنترل‌کننده‌ها |
| ۱۶۷ | ۷ مروری بر طراحی مستقیم سیستم‌های کنترل دیجیتال                                    |
| ۱۶۹ | ۱.۷ طراحی با استفاده از ترسیمه‌ی مسیر ریشه‌ها                                      |
| ۱۷۶ | ۲.۷ طراحی مستقیم با استفاده از تبدیل $w$                                           |
| ۱۷۶ | ۱.۲.۷ مراحل طراحی                                                                  |
| ۱۸۵ | ۸ دسترسی پذیری و مشاهده‌پذیری سیستم‌های تحت کنترل                                  |
| ۱۸۵ | ۱.۸ کنترل‌پذیری سیستم‌های پیوسته و گسسته                                           |
| ۱۸۵ | ۱.۱.۸ کنترل‌پذیری سیستم‌های پیوسته                                                 |
| ۱۸۷ | ۲.۱.۸ دسترسی‌پذیری سیستم‌های گسسته                                                 |
| ۱۹۲ | ۳.۱.۸ آزمون رتبه‌ی ماتریس $W_r$                                                    |
| ۱۹۳ | ۴.۱.۸ آزمون بردار ویژه                                                             |
| ۱۹۴ | ۵.۱.۸ آزمون PBH                                                                    |
| ۱۹۷ | ۲.۸ مشاهده‌پذیری سیستم‌های گسسته و پیوسته                                          |
| ۲۰۰ | ۱.۲.۸ آزمون ماتریس مشاهده‌پذیری                                                    |

|     |                                                                     |     |
|-----|---------------------------------------------------------------------|-----|
| ۲۰۲ | آزمون رتبه ماتریس $W_o$                                             | ۲۰۲ |
| ۲۰۲ | سایر آزمون‌های مشاهده‌پذیری                                         | ۳۰۲ |
| ۲۰۶ | اثرات گسسته‌سازی بر کنترل‌پذیری و مشاهده‌پذیری                      | ۳۰۸ |
| ۲۰۸ | فرکانس نمونه‌برداری معیوب                                           | ۴۰۸ |
| ۲۰۹ | اثر نمونه‌برداری معیوب بر کنترل‌پذیری و مشاهده‌پذیری                | ۵۰۸ |
| ۲۱۷ | ۹ تعبیر فرکانسی و زمانی ارتباط بین سیستم‌های پیوسته و مدل‌های گسسته |     |
| ۲۱۷ | ۱.۹ تعبیر فرکانسی ارتباط سیستم‌های پیوسته و مدل‌های گسسته           |     |
| ۲۱۷ | ۱.۱.۹ خطای گسسته‌سازی از منظر فرکانسی                               |     |
| ۲۱۹ | ۲.۱.۹ خطای گسسته‌سازی در روش تاستین                                 |     |
| ۲۲۳ | ۲.۹ نُرم سیگنال‌ها و سیستم‌ها                                       |     |
| ۲۳۱ | ۳.۹ نُرم سیستم‌های چند متغیره                                       |     |
| ۲۳۶ | ۴.۹ فضاهای تابعی                                                    |     |
| ۲۴۰ | ۵.۹ فرازش سیگنال‌ها و سیستم‌های پیوسته                              |     |
| ۲۴۲ | ۶.۹ فرازش سیستم‌ها                                                  |     |
| ۲۴۷ | ۷.۹ تعبیر زمانی ارتباط سیستم‌های پیوسته و مدل‌های گسسته             |     |
| ۲۵۵ | منابع                                                               |     |

# ۱

## معرفی

سیگنال پیوسته و  $n$  بعدی  $x(t)$  را در نظر بگیرید. فرض کنید که  $t$  می‌تواند هر مقداری در  $\mathbb{R}$  را به خود بگیرد، که در اینجا  $\mathbb{R}$  مجموعه‌ی اعداد حقیقی است. آنگاه به ازای هر مقدار  $t$ ،  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ . بنابراین  $x$  تابعی از  $\mathbb{R}$  به  $\mathbb{R}^n$  است. تمام سیستم‌های تحت کنترل مورد بررسی در این کتاب از نوع پیوسته در زمان هستند. در سیستم‌های کنترل حلقه‌بسته‌ی آنالوگ، علاوه بر خود سیستم تحت کنترل، جریان اطلاعات از خروجی اندازه‌گیر تا کنترل‌کننده و جریان محاسبات در کنترل‌کننده و فرامین ارسالی از کنترل‌کننده تا عملگرهای فیزیکی نیز به طور کامل در زمان پیوسته انتقال می‌یابد.

حال یک سیگنال گسسته در زمان و  $n$  بعدی  $\xi(k)$  را در نظر بگیرید. فرض کنید که  $k$  می‌تواند هر مقداری در  $\mathbb{Z}$  را به خود بگیرد، که  $\mathbb{Z}$  مجموعه‌ی اعداد صحیح است. آنگاه،  $\xi(k)$  تابعی از  $\mathbb{Z}$  به  $\mathbb{R}^n$  است. در سیستم‌های کنترل حلقه‌بسته‌ی دیجیتال، علی‌رغم آنکه همانند سیستم‌های کنترل آنالوگ، رفتار سیستم تحت کنترل به صورت پیوسته است، لیکن جریان اطلاعات از خروجی اندازه‌گیر تا کنترل‌کننده و جریان محاسبات در کنترل‌کننده و فرامین ارسالی از کنترل‌کننده تا عملگرهای فیزیکی به صورت سیگنال‌های گسسته در زمان انتقال می‌یابد.

## ۱.۱ مزایای سیستم‌های کنترل دیجیتال

در مقایسه با سیستم‌های آنالوگ، استفاده از سیستم‌های دیجیتال موجب حصول مزیت‌های ویژه‌ای به شرح زیر می‌گردد:

اختلال پذیری کمتر. سیگنال‌های دیجیتال به صورت زنجیره‌ای از صفرها و یک‌ها ذخیره شده و انتقال می‌یابند، لذا احتمال تاثیر اختلال‌های خارجی (نویز) بر آن‌ها بسیار ناچیز است.

محاسبات در بستر سخت افزاری قابل اعتماد. فرآیندهای محاسباتی دیجیتال، مشتمل بر انجام اعمالی نظیر

جمع و تفریق بر روی سیگنال‌های ذخیره شده در حافظه است. اینگونه محاسبات به دلیل پیاده‌سازی بر روی سخت افزارهای رایانه‌ای، معمولاً از تکرار پذیری و دقت بسیار بالایی برخوردار هستند. اما در مورد سیگنال‌های آنالوگ، فرآیندهای عملیاتی شامل محاسبات آنالوگی است که در بسترهای سخت افزاری غیر قطعی و توسط خازن‌ها، مقاومت‌ها و تقویت‌کننده‌ها صورت گرفته و معمولاً از تکرار پذیری و دقت کمتری برخوردار هستند.

**قابلیت برنامه ریزی.** یک کنترل‌کننده‌ی آنالوگ، به صورت مدارهای نسبتاً پیچیده‌ی الکتریکی، الکترونیکی و یا نیوماتیک ساخته می‌شود. هرگونه تغییر و اصلاح بعدی در معادلات این نوع کنترل‌کننده‌ها مستلزم تغییرات اساسی در مدارهای مربوطه است. اما در سیستم‌های کنترل دیجیتال، که از سخت‌افزارهای رایانه‌ای استفاده می‌کنند، الگوریتم‌های کنترلی در واقع چیزی بیش از نرم‌افزارهای خاص منظوره نبوده و لذا پارامترها و حتی ساختار کلی کنترل‌کننده همواره و به سادگی قابل برنامه‌ریزی و تغییر است.

**قابلیت انعطاف ساختاری.** امروزه با رشد امکانات سخت‌افزاری و نرم‌افزاری و پروتکل‌های ارتباطی جدید مانند پروفی‌باس<sup>۱</sup> و تی‌سی‌پی-آی‌پی<sup>۲</sup> امکان استفاده از شبکه‌های کنترلی محلی و حتی اینترنتی فراهم آمده و ایده‌هایی مانند روبات‌های راهبر-پیرو<sup>۳</sup> و سیستم‌های کنترل جراحی از راه دور<sup>۴</sup> امکان تحقق یافته‌اند. هم‌گامی با این روندهای تکنولوژی، برای سیستم‌های کنترل دیجیتال بسیار ساده‌تر از سیستم‌های معادل آنالوگ است.

**سرعت قابل رقابت.** با پیشرفت روزافزون فناوری دیجیتال، ظرفیت ذخیره سازی و سرعت محاسبات با نرخ سرسام‌آوری رشد نموده و لذا امکان نمونه‌برداری سریع از سیگنال‌های آنالوگ و تبدیل آن‌ها به سیگنال‌های دیجیتال، شرایطی را فراهم کرده، که سرعت عملکرد سیستم‌های کنترل دیجیتال عملاً هم‌سنگ سیستم‌های کنترل آنالوگ گردیده‌است.

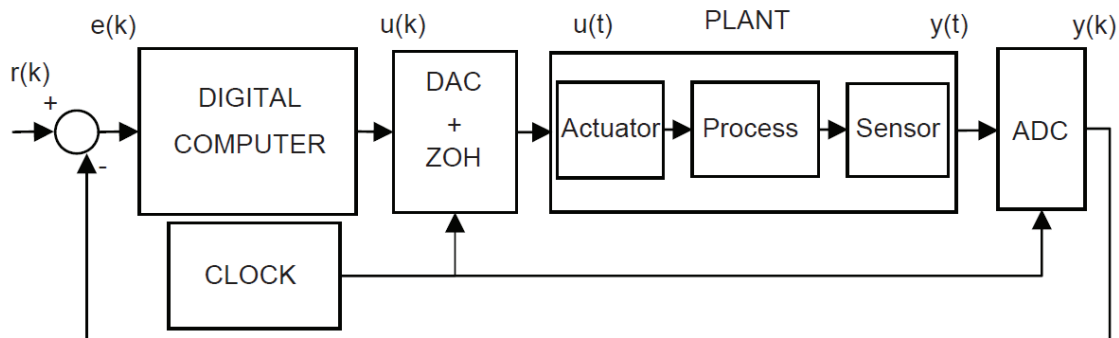
**صرفه اقتصادی.** برخلاف روند کلی بازار جهانی که نسبت قیمت به کیفیت اکثر محصولات صنعتی با نرخ کمی کاهش می‌یابد، قیمت محصولات رایانه‌ای و کالاهای متکی به فناوری‌های دیجیتال، با نرخ بسیار بیشتری کاهش یافته است. ظهور مدارهای مجتمع بسیار فشرده یا، VLSI<sup>۵</sup>، فناوری‌های در اختیار رایانه‌ها را از امکانات بی سابقه‌ای برخوردار نموده و لذا منجر به افزایش قابلیت‌های آن‌ها و کاهش باورنکردنی اینگونه محصولات گردیده است. طبیعتاً این امر، منجر به افزایش روزافزون اهمیت تکنولوژی‌های مرتبط با دانش کنترل دیجیتال نیز شده‌است.

## ۲.۱ ساختار سیستم‌های کنترل دیجیتال

اکثر سیگنال‌های موجود در یک سیستم کنترل پیوسته، مانند ورودی‌های فرمان، خطاهای پیگیری فرامین، خروجی‌های عملگرها و غیره، در واقع سیگنال‌های پیوسته‌اند. همچنین با توجه به امکان درک فیزیکی بهتر،

<sup>۱</sup> profibus    <sup>۲</sup> TCP/IP (Transmission Control Protocol/Internet Protocol)    <sup>۳</sup> Slave-master robots    <sup>۴</sup> Remote surgery  
<sup>۵</sup> Very Large Scale Integration

معیارهای کارایی سیستم‌های حلقه‌بسته، همانند پهنای باند<sup>۶</sup>، جهش اولیه<sup>۷</sup>، زمان برخاست<sup>۸</sup> و امثال آن‌ها نیز معمولاً در زمان پیوسته تعریف و بیان می‌گردند. با توجه به مزایای از پیش گفته‌ی سیستم‌های کنترل دیجیتال، امروزه اکثر کنترل‌کننده‌ها به صورت گسسته یا دیجیتال ساخته و پیکربندی می‌شوند. به علت این عدم هم‌زمانی یا هم‌زمانی، ضرورت افزودن مترجم‌های خاصی که سیگنال‌ها را بین حوزه‌های زمانی پیوسته و گسسته به یکدیگر تبدیل کنند، آشکار می‌گردد.



شکل ۱.۱ ساختار کلی یک سیستم کنترل دیجیتال

شکل ۱.۱ ساختار کلی یک سیستم کنترل دیجیتال را نمایش می‌دهد، که در آن الگوریتم کنترلی به صورت معادلات جبری در یک کامپیوتر دیجیتال پیاده‌سازی شده و هم‌زمان با تغییرات زمانی سیستم کنترل به اجرا در می‌آید. کنترل‌کننده‌ی گسسته سه کارکرد اصلی دارد: (۱) سیگنال پیوسته‌ی خطا را نمونه‌برداری و پله‌بندی کمی<sup>۹</sup> نموده و آن را به یک سیگنال دیجیتال تبدیل می‌کند، (۲) این سیگنال دیجیتال را بر اساس یک الگوریتم ریاضی داده‌پردازی کرده و (۳) سیگنال دیجیتال حاصل را برای تبدیل به یک سیگنال الکتریکی پیوسته به مبدل دیجیتال به آنالوگ<sup>۱۰</sup> فرستاده تا برای اعمال به عملگر مناسب‌سازی شود. از سوی دیگر در اکثر موارد، سیستم تحت کنترل نیز یک سیستم پیوسته در زمان است، یعنی ورودی و خروجی آن در تمامی زمان‌ها مقدار دارد. برای ارسال اطلاعات درباره‌ی مقدار خروجی سیستم کنترل نیز باید از یک یا مجموعه‌ای از اندازه‌گیرها یا سنسورها استفاده کرد. اگر ماهیت این سنسورها دیجیتال نباشد، آن‌گاه لازم است تا خروجی آن‌ها یعنی،  $y(t)$ ، برای ورود به کامپیوتر آماده‌سازی شده و در واقع به سیگنال‌های دیجیتال تبدیل شود. برای این کار از یک مبدل آنالوگ به دیجیتال<sup>۱۱</sup> استفاده می‌شود که در واقع سیگنال‌های الکتریکی وارد شده از سنسورها را به یک رشته‌ی متوالی از اعداد باینری<sup>۱۲</sup> یا دودویی تبدیل نموده و در اختیار کامپیوتر کنترلی قرار می‌دهد. معمولاً کامپیوتر با استفاده از یک ساعت الکترونیکی<sup>۱۳</sup> وظیفه‌ی هم‌زمان‌سازی اعمال مبدل‌های  $D/A$  و  $A/D$  را بر عهده دارد. بنابراین، اگرچه یک سیستم کنترل دیجیتال مشتمل بر تعدادی سیگنال پیوسته و گسسته است ولی رفتار کلی آن از منظر ناظر خارجی، یعنی از ورودی  $A/D$  تا خروجی  $D/A$  در واقع در زمان پیوسته صورت گرفته و با مجموعه‌ی

<sup>۶</sup> Bandwidth      <sup>۷</sup> Overshoot      <sup>۸</sup> Rise-time      <sup>۹</sup> Quantization      <sup>۱۰</sup> Digital to Analog converter (D/A)  
<sup>۱۱</sup> Analog to Digital converter      <sup>۱۲</sup> Binary      <sup>۱۳</sup> Clock

عملگر-فرآیند تحت کنترل-سنسور، که معمولاً یک مجموعه‌ی پیوسته در زمان را تشکیل می‌دهند، از طریق سیگنال‌های الکتریکی پیوسته مرتبط می‌شود. فرامین کاربر برای هدایت سیستم کنترل، یعنی  $r(k)$  نیز معمولاً به صورت دیجیتال قابل اعمال است، که پس از مقایسه با  $y(k)$  در واقع سیگنال خطا را ایجاد می‌کند. لازم به ذکر است که این عمل مقایسه را می‌توان بیرون از کامپیوتر (مانند شکل ۱.۱) و یا در درون الگوریتم کنترلی انجام داد، که در این صورت سیگنال‌های  $y(k)$  و  $r(k)$  را باید از طریق دو درگاه دیجیتال<sup>۱۴</sup> به بخش حافظه‌ی موقت کامپیوتر انتقال داد.

**مثال ۱.۲.۱ (سیستم کنترل دارورسانی تزریقی)** در بعضی از بیماری‌ها به دلیل از کار افتادن سیستم کنترل سطح مواد آلی موجود در خون در بدن بیمار، احتیاج به یک سیستم کنترلی به منظور کنترل میزان یک دارو یا یک هورمون در بدن بیمار در طول فرآیند درمان، اجتناب‌ناپذیر است. مهم‌ترین بیماری در این زمینه، بیماری دیابت است که در مبتلایان به این بیماری، نیاز به کنترل سطح انسولین موجود در خون، از مهم‌ترین الزامات است. به منظور طراحی یک سیستم دارورسانی حلقه‌بسته، از یک سنسور برای اندازه‌گیری سطح داروی تزریقی استفاده و نتیجه‌ی اندازه‌گیری به فرم دیجیتال تبدیل شده و به کامپیوتر کنترل‌کننده ارسال می‌گردد. پمپ تزریق دارو توسط این کامپیوتر راه‌اندازی می‌شود. دیاگرام جعبه‌ای این سیستم در شکل ۲.۱ نشان داده شده است.

در ادامه‌ی بحث، از قراردادهای زیر استفاده خواهیم کرد:

زمان (تناوب) نمونه‌برداری:  $h$

لحظات نمونه‌برداری:  $\dots, -2h, -h, 0, h, 2h, 3h, \dots$

فواصل نمونه‌برداری:  $\dots, [-h, 0), [0, h), [h, 2h), \dots$

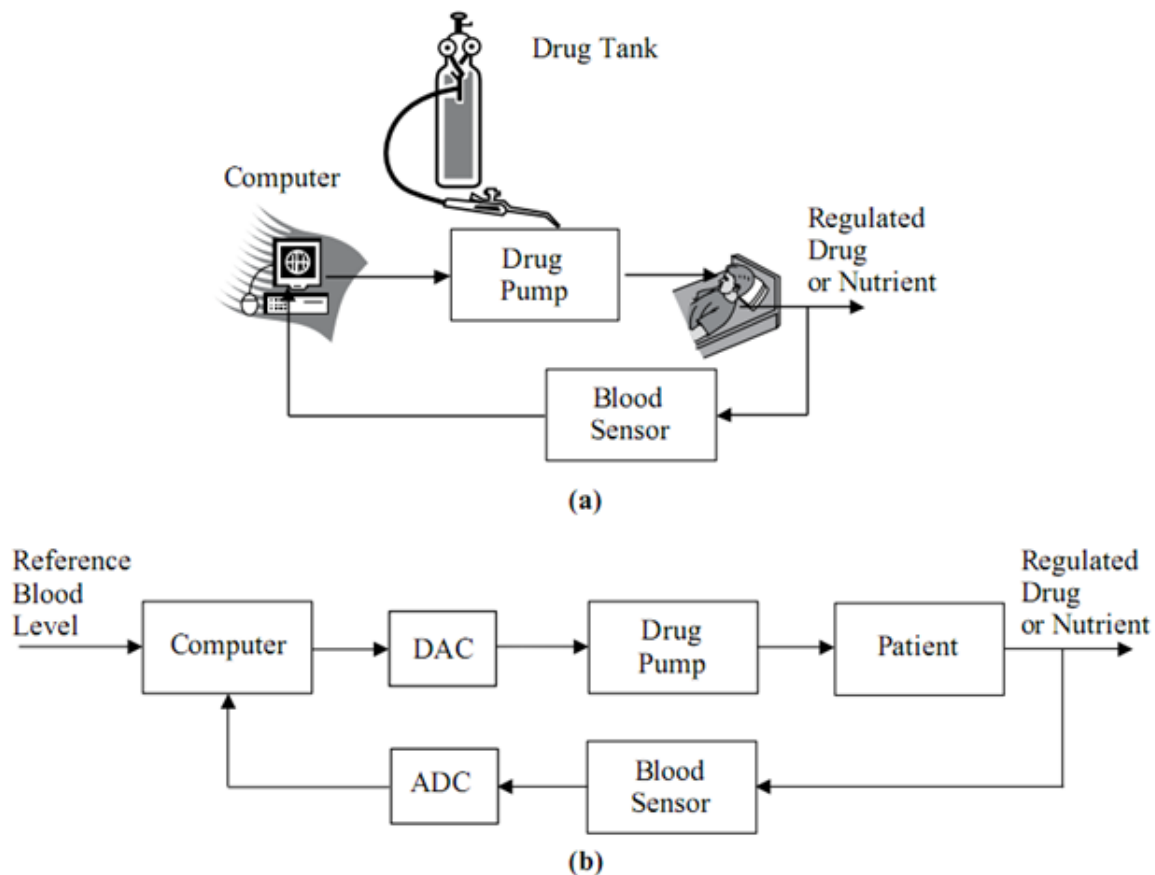
یادآور می‌شود که منظور از  $[-h, 0)$  مجموعه‌ی زمان‌های  $t$  است که:  $-h \leq t < 0$ .

**مثال ۲.۲.۱ (سیستم تیر و گوی)** یکی از مثال‌های جالب درباره‌ی سیستم‌های کنترل دیجیتال، پایدارسازی و کنترل یک ساختار تیر و گوی<sup>۱۵</sup> است (شکل ۳.۱). یک توپ فلزی با امکان حرکت آزاد در طول شکاف موجود بر روی یک تیر را در نظر بگیرید. فرض کنید که زاویه‌ی تیر، توسط یک موتور الکتریکی که فرمانش را از یک رایانه‌ی کوچک دریافت می‌نماید، تغییر می‌کند. هدف آن است که موقعیت توپ را به صورت دلخواه تحت فرمان درآوریم.

در مثال بالا، اعمال ولتاژ تحریک به موتور، موجب ایجاد گشتاور  $\tau$  شده و موقعیت زاویه‌ای تیر را تغییر می‌دهد. فاصله‌ی  $d$ ، موقعیت مکانی توپ نسبت به مرکز دوران تیر را نشان می‌دهد و توسط یک حسگر اندازه‌گیری شده و برای فیلتر آنالوگ ارسال می‌شود. این حسگر را می‌توان با خواباندن یک سیم مقاومتی در کف شیار تیر که به صورت یک تقسیم‌کننده‌ی ولتاژ عمل می‌کند، ساخت. وظیفه‌ی این فیلتر پایین‌گذر، حذف نویزهای فرکانس بالا از سیگنال اندازه‌گیری شده است. در صورتی که این نویزها قبل از فرآیند نمونه‌برداری حذف نشوند، ممکن

<sup>۱۴</sup>Digital port

<sup>۱۵</sup>Ball and beam



شکل ۲.۱ ساختار سیستم کنترل دارورسانی تزریقی

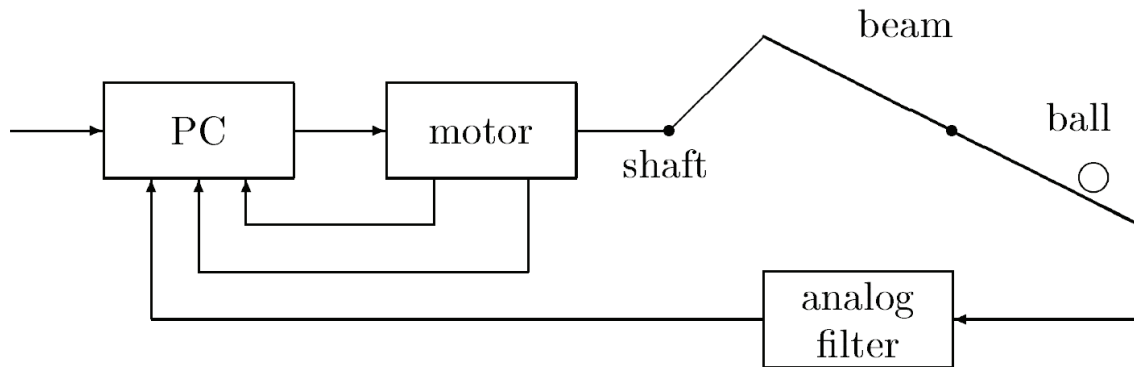
است پس از آن به صورت سیگنال‌های کم فرکانس ظاهر شده و در کار سیستم کنترل اختلال جدی وارد کنند (پدیده کم‌نمایی فرکانسی<sup>۱۶</sup>)، از این‌رو، این‌گونه فیلترها را ضد کم‌نمایی فرکانسی<sup>۱۷</sup> می‌نامند.

رایانه‌ی کوچک نشان داده شده در شکل ۳.۱ نیز دارای تنها یک خروجی بوده که مبین ولتاژی است که باید به موتور الکتریکی اعمال شود و ضمناً دارای سه کانال ورودی نیز می‌باشد. این سه ورودی عبارت‌اند از: یک ولتاژ فرمان،  $r$ ، که بیانگر موقعیت مطلوب توپ بوده و توسط کاربر اعمال می‌گردد، دو ورودی دیگر به ترتیب موقعیت زاویه‌ای تیر،  $\theta$ ، و مشتق آن،  $\dot{\theta}$ ، هستند که توسط حسگرهای مربوطه اندازه‌گیری و به صورت ولتاژ به کنترل‌کننده وارد می‌شوند. رایانه‌ی شخصی دارای یک کارت مبدل آنالوگ به دیجیتال یا A/D و مبدل دیجیتال به آنالوگ یا D/A است. دیاگرام جعبه‌ای مجموعه‌ی سیستم در شکل ۴.۱ نمایش داده شده‌است. در این شکل،  $u$ ، مبین عملیات جبری انجام شده در رایانه‌ی کنترلی است.

دیاگرام جعبه‌ای فوق را به صورت دیگری نیز می‌توان نشان داد. برای این کار، چهار سیگنال مهم را نام‌گذاری

<sup>۱۶</sup> Aliasing

<sup>۱۷</sup> Anti-aliasing



شکل ۳.۱ ساختار یک سیستم تیر و گوی

می‌کنیم:

سیگنال خطا  $z$

در این قسمت تمرکز خود را بر مسئله دنبالگری یا پیروی از فرمان مرجع قرار می‌دهیم. به عبارت دیگر می‌خواهیم مقدار  $d$  به مقدار  $r$  نزدیک باشد. برای این کار، مقدار  $z$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$z = r - d$$

سیگنال دوم را نیز به ترتیب زیر در نظر می‌گیریم:

سیگنال ورودی به کنترل‌کننده دیجیتال  $y$

در مثال فوق، بردار سه عضوی  $y$ ، به صورت زیر خواهد بود:

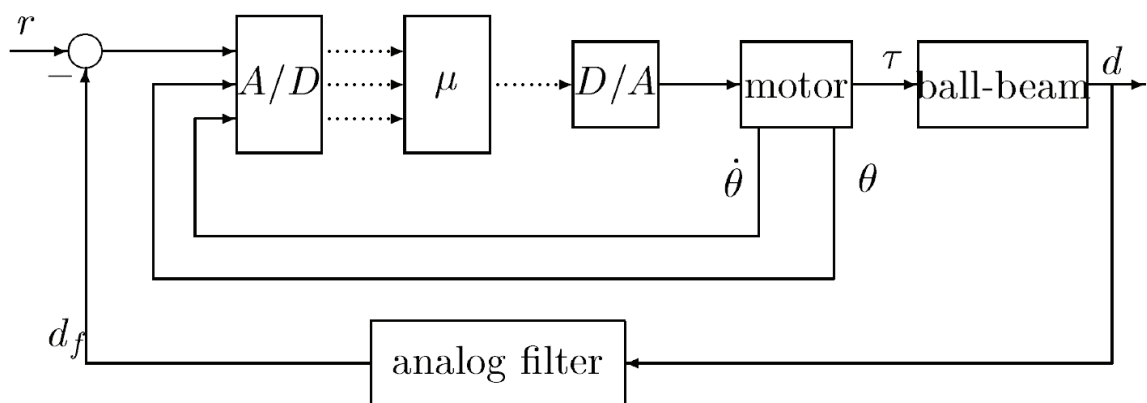
$$y = \begin{bmatrix} r - d_f \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

سیگنال سوم را نیز به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

مجموعه‌ی سیگنال‌های خارجی شامل ورودی‌های مرجع، اغتشاشات خارجی و نویز اندازه‌گیرها  $w$

بنابراین  $w$  شامل تمامی سیگنال‌هایی است که از خارج به حلقه کنترلی وارد می‌شوند. در مثال حاضر داریم:  $w = r$ . و سرانجام، چهارمین سیگنال به صورت زیر تعریف می‌شود:

ورودی کنترلی = خروجی کنترل‌کننده‌ی دیجیتال  $u$



شکل ۴.۱ دیاگرام جعبه‌ای و عملیاتی سیستم تیر و گوی

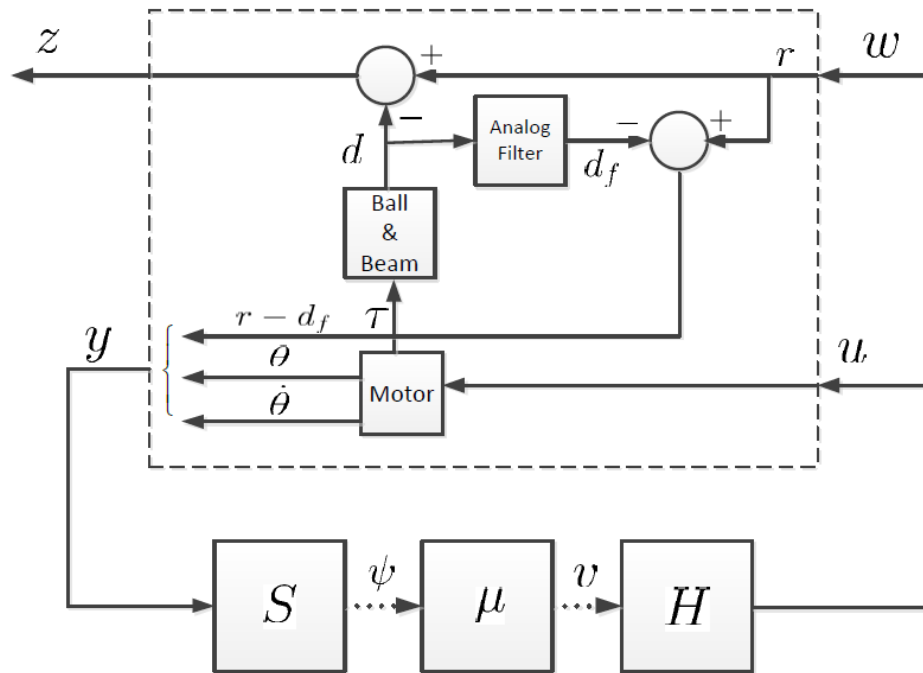
با تعریف این چهار سیگنال پیکربندی جدیدی مطابق شکل‌های ۵.۱ و ۶.۱ برای سیستم تیر و گوی به دست می‌آید.

پیکربندی نمایش داده شده در شکل ۶.۱ را یک «سیستم کنترل دیجیتال استاندارد» می‌نامند. نکات زیر قابل توجه است:

- سیگنال‌های  $u$ ،  $y$  و  $z$  از نوع پیوسته و احتمالا برداری هستند و بزرگی آن‌ها می‌تواند یک عدد حقیقی باشد.
- سیگنال‌های  $v$  و  $\psi$  از نوع گسسته و احتمالا برداری هستند و بزرگی آن‌ها یک عدد حقیقی پله‌بندی شده است.
- رفتار دینامیکی داشته و مشتمل بر تعدادی از اجزای فیزیکی (موتور، اجزای مکانیکی سیستم تیر و گوی و فیلتر آنالوگ) و المان‌های جمع‌کننده است. توجه نمایید که تنها یکی از مراکز جمع نشان داده شده در شکل به صورت واقعی در سیستم ساخته شده وجود دارد. سیستم  $G$  را سیستم تحت کنترل تعمیم یافته<sup>۱۸</sup> می‌نامند. این سیستم قبل از فرآیند طراحی کنترل‌کننده به دست آمده و از آن به بعد ثابت فرض می‌شود.
- جعبه‌ی A/D نمایش‌دهنده‌ی یک مبدل سیگنال آنالوگ به دیجیتال است و در حالت کلی ممکن است دارای چند ورودی و چند خروجی باشد.
- جعبه‌ی D/A نمایش‌دهنده‌ی یک مبدل سیگنال دیجیتال به آنالوگ است و در حالت کلی ممکن است دارای چند ورودی و چند خروجی باشد.
- در اینجا،  $\mu$ ، یک میکروپروسسور یا واحد محاسباتی مرکزی رایانه‌ای است که به منظور اجرای الگوریتم کنترلی در نظر گرفته می‌شود.

به عنوان ابزاری برای تحلیل و طراحی، سیستم کنترل استاندارد را به صورت ساده‌تر مطابق شکل ۷.۱ نمایش می‌دهیم. چنان‌که ملاحظه می‌گردد، کنترل‌کننده‌ی  $K$  در واقع شامل سه جزء اصلی است، که در ادامه تعریف

<sup>۱۸</sup>Generalized plant



شکل ۵.۱ دستگاه تعمیم یافته در تعامل با کنترل کننده برای مثال تیر و گوی

می شوند:

۱.  $S$ ، یک نمونه بردار ایده آل است که در زمان های مشخصی از سیگنال  $y(t)$  نمونه برداری نموده و سیگنال گسسته  $\psi(k)$  را ایجاد می نماید. اگر زمان تناوب نمونه برداری را  $h$  بنامیم، آن گاه:

$$\psi(k) := y(kh)$$

در حالت کلی،  $y(t)$  و  $\psi(t)$  ممکن است بردارهایی با ابعاد مشابه باشند. در اینجا فرض بر آن است که دامنه  $\psi(k)$  پله بندی نشده است.

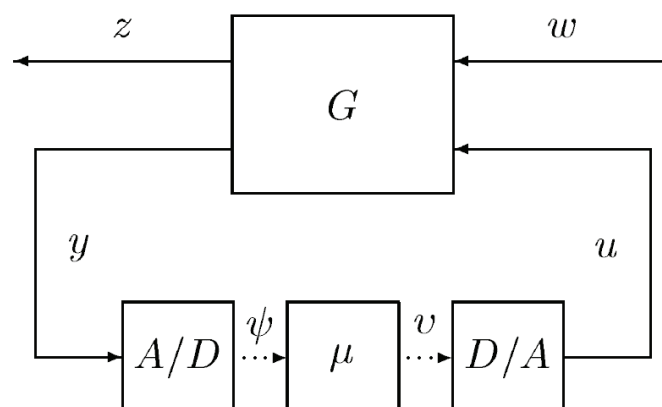
۲.  $K_d$ ، یک سیستم گسسته خطی ثابت با زمان (LTI)، سببی<sup>۱۹</sup> و با بعد محدود<sup>۲۰</sup> است. ورودی و خروجی های آن در زمان،  $k$ ، به ترتیب برابر با  $\psi(k)$  و  $v(k)$  می باشند. برای نمایش  $K_d$  می توان از معادلات تفاضلی، معادلات حالت و یا توابع تبدیل استفاده نمود.

۳.  $H$ ، یک عملگر نگه دارنده مرتبه صفر<sup>۲۱</sup> است، که سیگنال گسسته  $v$  را به سیگنال پیوسته در زمان  $u(t)$  تبدیل می کند. این کار با تثبیت مقادیر سیگنال در فواصل بین زمان های نمونه برداری صورت می گیرد. بنابراین:

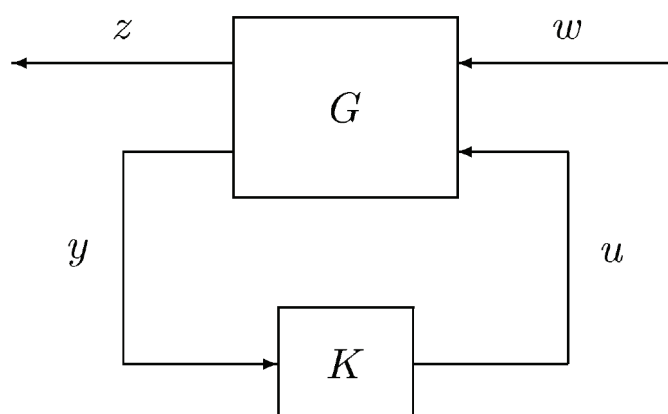
$$u(t) = v(k), \quad kh \leq t < (k+1)h.$$

لازم به ذکر است که  $S$  و  $H$  توسط یک ساعت سخت افزاری کنترل شده و هم زمان با هم عمل می کنند. این

<sup>۱۹</sup>Causal      <sup>۲۰</sup>Finite dimensional      <sup>۲۱</sup>Zero order hold element



شکل ۶.۱ دیاگرام جعبه‌ای استاندارد برای یک سیستم کنترل دیجیتال

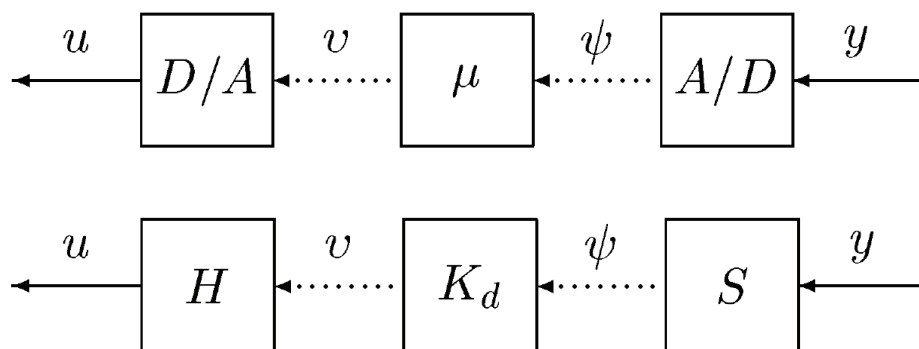


شکل ۷.۱ دیاگرام جعبه‌ای استاندارد برای یک سیستم کنترل پیوسته

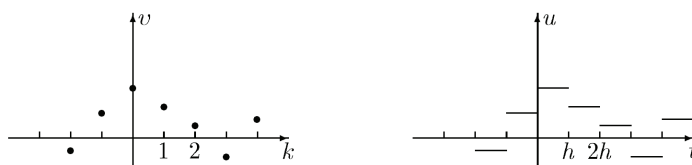
المان‌ها را آرمانی و بدون تأخیر فرض می‌کنیم، یعنی  $S$  بلافاصله پس از نمونه‌برداری، خروجی مورد نظر را تولید می‌کند و همچنین  $H$  نیز به محض فعال شدن خروجی خود را به صورت ناگهانی تغییر می‌دهد. بدیهی است که مدارهای  $A/D$  و  $D/A$  واقعی این‌گونه عمل نمی‌کنند و در واقع اندکی تأخیر در پاسخ آن‌ها وجود دارد. در انتها، سیستم استاندارد با نمونه‌برداری نشان داده شده در شکل ۱۰.۱ را در نظر بگیرید. این سیستم دارای دو ورودی  $(w, u)$  و دو خروجی  $(z, y)$  است و به عنوان یک سیستم خطی به چهار بخش زیر قابل تقسیم است:

$$z = G_{11}w + G_{12}u,$$

$$y = G_{21}w + G_{22}u.$$



شکل ۸.۱ نمایش‌های مختلف کنترل‌کننده‌ی گسسته و ارتباط آن با فضای پیوسته



شکل ۹.۱ عملکرد نگه‌دارنده‌ی مرتبه‌ی صفر (ZOH)

می‌توان نشان داد که سیستم تلفیقی از ورودی  $w$  تا خروجی  $z$  به صورت زیر است:

$$G_{11} + G_{12}HK_dS(I - G_{22}HK_dS)^{-1}G_{21}, \quad (1.1)$$

نمایش معادل دیگر برای این سیستم عبارت است از:

$$G_{11} + G_{12}(I - HK_dSG_{22})^{-1}HK_dSG_{21}. \quad (2.1)$$

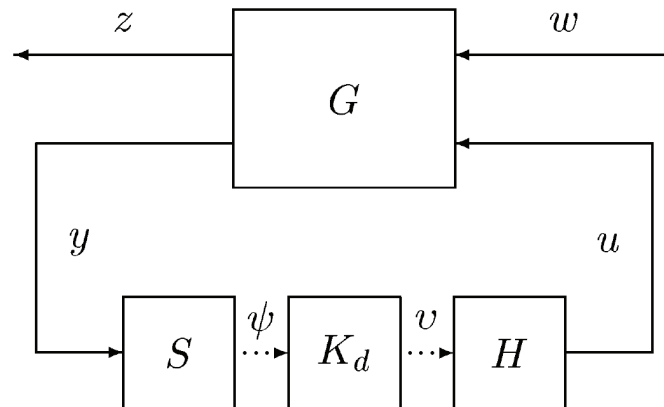
روش به دست آوردن این نمایش معادل به ترتیب زیر است:

$$\begin{aligned} u &= (HK_dS)y \\ &= (HK_dS)G_{21}w + (HK_dS)G_{22}u \\ &= [I - HK_dSG_{22}]^{-1}(HK_dS)G_{21}w \\ \Rightarrow z &= [G_{11} + G_{12}(I - HK_dSG_{22})^{-1}(HK_dS)G_{21}]w. \end{aligned}$$

بر اساس ایده‌آل‌انگاری  $S$  و  $H$ ، یک مدل ایده‌آل از سیستم کنترل دیجیتال به دست می‌آید (شکل ۱۰.۱). این مدل آرمانی را «سیستم استاندارد با نمونه‌گیری»<sup>۲۲</sup> می‌نامیم. بنابراین در یک سیستم با نمونه‌گیری، سیگنال‌های

<sup>۲۲</sup>Standard sampled data (SD) system

پیوسته و گسسته به طور هم‌زمان حضور دارند، در حالی‌که عبارت «دیجیتال» بیانگر وجود سیگنال‌های تماماً دیجیتال در مدل است.



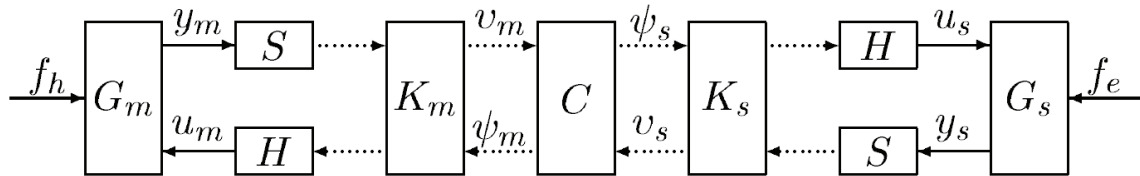
شکل ۱۰.۱ سیستم استاندارد با نمونه‌گیری

در پیکربندی نشان داده شده در شکل ۱۰.۱ کنترل‌کننده در واقع به صورت  $K = HK_dS$  خواهد بود. لازم به تاکید می‌باشد که یک سیستم کنترل با نمونه‌گیری در واقع کماکان یک سیستم خطی ولی متغیر با زمان است. به‌خصوص  $K$  فاقد مدل ریاضی (به صورت یک تابع تبدیل) بوده و در نتیجه استفاده از روش‌های کنترلی مبتنی بر توابع تبدیل در مورد سیستم‌های با نمونه‌گیری کاربرد نداشته و روش‌های دیگری نیاز است. این بخش را با چند مثال دیگر خاتمه خواهیم داد.

**مثال ۳.۲.۱** (ربات با فرمان از راه دور) یک ربات با فرمان از راه دور<sup>۲۳</sup>، از دو ربات جداگانه موسوم به ربات‌های فرمانده<sup>۲۴</sup> و فرمان‌گیر<sup>۲۵</sup>، که در دو مکان متفاوت قرار دارند تشکیل شده‌است. به عنوان مثال، ربات فرمان‌گیر ممکن است در یک ایستگاه فضایی و ربات فرمانده در یک ایستگاه زمینی قرار داشته باشد. ربات فرمانده توسط دست کاربر به حرکت واداشته می‌شود و پیروی آن، ربات فرمان‌گیر هم عملیات مشخصی را انجام می‌دهد. مرسوم آن است که ربات فرمان‌گیر به هنگام عدم درگیری با موانع محیطی، حرکات ربات فرمانده را تقلید نموده و به هنگام برخورد با موانع اطراف، نیروی وارده را به صورت بازخوردی به ربات فرمانده برگردانده و نیروی

<sup>۲۳</sup>Telerobot    <sup>۲۴</sup>Master    <sup>۲۵</sup>Slave

معادلی را به دست کاربر وارد کند. مانع اصلی در برابر تحقق این هدف، تأخیر موجود در کانال مخابراتی بین دو ربات است.



شکل ۱۱.۱ ربات با فرمان از راه دور

شکل ۱۱.۱ دیاگرام جعبه‌ای یک نمونه از ربات‌های دورفرمان با یک کانال مخابراتی دیجیتال را نمایش می‌دهد. زیرسیستم‌های مربوطه عبارت‌اند از:

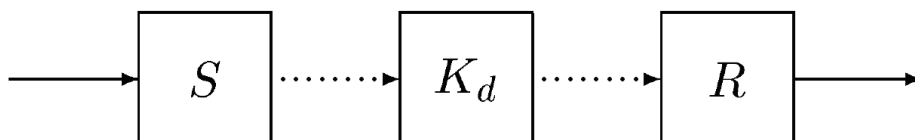
$G_m, G_s$  : ربات‌های فرمانده و فرمان‌گیر  
 $K_m, K_s$  : کنترل‌کننده‌های دیجیتال برای ربات‌های فوق  
 $C$  : کانال مخابراتی دیجیتال

همچنین سیگنال‌های نشان داده شده در شکل ۱۱.۱ به شرح زیر است:

$y_m, y_s$  : سیگنال‌های اندازه‌گیری ربات‌های فرمانده و فرمان‌گیر  
 $u_m, u_s$  : سیگنال‌های کنترلی ربات‌های فرمانده و فرمان‌گیر  
 $v_m, v_s$  : سیگنال‌های انتقالی از طریق کانال مخابراتی  
 $\psi_m, \psi_s$  : سیگنال‌های دریافتی توسط ربات‌ها  
 $f_h$  : نیروی وارده از طرف کاربر به ربات فرمانده  
 $f_e$  : نیروی وارده از طرف محیط به ربات فرمان‌گیر

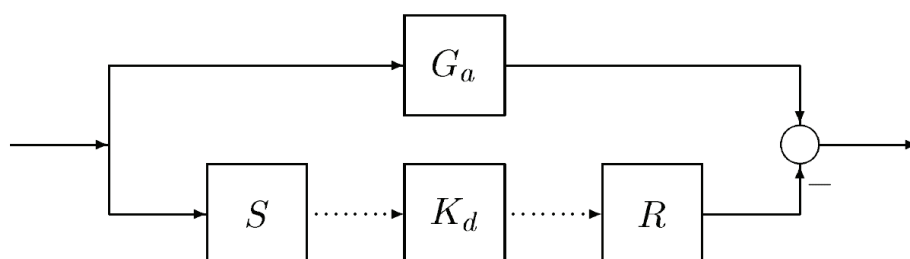
(می‌توان دینامیک‌های رفتاری کاربر و محیط را نیز به مدل فوق اضافه کرد.)

مثال ۴.۲.۱ (پیاده‌سازی دیجیتال فیلترهای آنالوگ) فرض کنید که  $G_a$  یک فیلتر آنالوگ از پیش طراحی شده است و ما می‌خواهیم که این فیلتر را به صورت دیجیتال پیاده‌سازی نماییم، یعنی در قالب سیستمی به شکل زیر:



در اینجا،  $K_d$ ، یک فیلتر دیجیتال،  $S$ ، یک نمونه‌گیر و  $R$ ، یک کارت D/A است. برای پیاده‌سازی این سیستم در زمان حقیقی،  $R$  ممکن است یک نمونه‌گیر مرتبه صفر و برای پیاده‌سازی در زمان غیر حقیقی، ممکن است یک فیلتر ایده‌آل و غیر سببی باشد، که به روش میان‌یابی کار می‌کند. به دلیل ماهیت متفاوت، نمی‌توان از خطای بین  $G_a$  و  $K_d$  صحبت نمود، چنان‌که نمی‌توان سبب را با پرتقال مقایسه کرد. منطقی‌تر آن است که به سیستم مبین خطا، یعنی  $G_a - RK_dS$ ، که در شکل ۱۲.۱ نشان داده شده، توجه کنیم. این سیستم در واقع یک سیستم با نمونه‌گیری می‌باشد. یک معیار منطقی برای دست‌یابی به یک گسسته‌سازی موفق، کوچک بودن و در حالت ایده‌آل، صفر بودن دامنه‌ی این خطا، بر مبنای یک نرم است (نرم مناسب باید تعریف شود).

مشابه این سناریو در مورد طراحی فیلترهای دیجیتال نیز برقرار است. روش مرسوم برای طراحی فیلترهای دیجیتال، IIR<sup>۲۶</sup> (یعنی فیلترهایی که طول پاسخ ضربه‌ی آن‌ها نامحدود است)، آن است که ابتدا یک فیلتر آنالوگ مناسب طراحی نموده و سپس آن را به صورت دیجیتال پیاده‌سازی نمایند.



شکل ۱۲.۱ سیستم مبین خطای گسسته‌سازی

## ۳.۱ روش‌های طراحی کنترل‌کننده‌های دیجیتال

به عنوان یک محمل مشترک برای بررسی موضوع طراحی سیستم‌های کنترل‌کننده‌ی دیجیتال، یک تعریف رسمی از مسئله‌ی طراحی<sup>۲۷</sup> ارائه می‌دهیم:

- سیستم تحت کنترل تعمیم‌یافته،  $G$ ، و همچنین دوره‌تناوب نمونه‌برداری،  $h$ ، داده شده‌است،
- مطلوب است طراحی یک کنترل‌کننده‌ی گسسته‌ی  $K_d$  به نحوی که سیستم حاصل دو خاصیت زیر را داشته باشد:

پایداری داخلی؛

به ازای گروه مشخصی از ورودی‌های خارجی،  $w$ ، مقدار  $z$  «به اندازه‌ی کافی کوچک» باشد. این تعریف دارای ابهاماتی می‌باشد، ولی ایده‌ی اصلی آن بر این فرض استوار است که  $G$  و  $h$  داده شده و  $K_d$  باید طراحی و تعیین شود. در برخی از کاربردها و با توجه به امکانات بعضی از کارت‌های D/A، می‌توان مقدار  $h$  را

<sup>۲۶</sup>Infinite Impulse Response

<sup>۲۷</sup>Formal synthesis problem

نیز به دلخواه تغییر داد و آن را به عنوان یک پارامتر طراحی در نظر گرفت. اما در بسیاری از کاربردهای صنعتی، میکروپروسسور در مراحل قبلی انتخاب شده و تغییر آن در اختیار مهندس کنترل نمی‌باشد. در این حالت،  $h$  نیز از حوزه انتخاب‌های مهندس کنترل خارج می‌شود. عبارت «پایداری داخلی» در بخش‌های بعدی تعریف و مطالعه خواهد شد. همچنین منظور از عبارت «به اندازه‌ی کافی کوچک» درباره‌ی  $z$  نیز در بخش‌های آینده توضیح داده خواهد شد.

به طور کلی، سه رویکرد اصلی برای طراحی سیستم‌های کنترل با نمونه‌گیری وجود دارد: دو روش اول را غیر مستقیم و روش سوم را مستقیم می‌نامیم.

### طراحی پیوسته و پیاده‌سازی گسسته کنترل‌کننده

فرض کنید که در سیستم کنترل نشان داده شده در شکل ۷.۱، کنترل‌کننده‌ی آنالوگ  $K$  برای سیستم تحت کنترل  $G$  طراحی شده و رفتار حلقه‌بسته‌ی سیستم نیز راضی‌کننده است. منظور از پیاده‌سازی  $K$  به صورت یک کنترل‌کننده با نمونه‌گیری آن است که با استفاده از یک  $K_d$  مناسب، کنترل‌کننده‌ی پیوسته  $K$  را با یک کنترل‌کننده‌ی نمونه‌گیر به صورت  $HK_dS$  جایگزین کنیم. دو نمونه از روش‌های معمول برای انتخاب  $K_d$  عبارت‌اند از:

- $K_d$  با قرار دادن  $K$  بین مبدل‌های  $A/D$  و  $D/A$  به دست می‌آید، یعنی  $K_d = SKH$ .
- تابع تبدیل  $K_d$  با اعمال تبدیل دوخطی<sup>۲۸</sup> بر روی  $K$  به دست می‌آید.

مزیت این روش آن است که طراحی را می‌توان در زمان پیوسته انجام داد که شاخص‌های طراحی مفهوم طبیعی‌تری دارند. همچنین می‌توان انتظار داشت که با کوچک‌تر شدن  $h$  و در واقع به ازای  $h \rightarrow 0$ ، مشخصه‌های به دست آمده در فضای پیوسته، در حوزه‌ی گسسته بازیابی شود. اما در عمل، نکات متعددی این انتظار را با مشکل مواجه می‌کند. نکته‌ی اول آن است که با کاهش دوره‌تناوب نمونه‌برداری، نیاز به سخت‌افزارهای گران قیمت‌تر و جدیدتر خواهد بود، که این امر، به معنای لزوم ایجاد مصالحه‌ی جدیدی بین کارایی و هزینه می‌باشد. این موضوع به خصوص در مورد محصولات خانگی همانند دستگاه‌های خواندن لوح‌های فشرده، که در تیراژ بسیار وسیع تولید می‌شوند اهمیت دارد، زیرا صرفه‌جویی هر چند کم در هزینه‌ی یک دستگاه به صرفه‌جویی‌های عظیم در تولید انبوه آن‌ها می‌انجامد. نکته‌ی دوم به افزایش زیاد در حجم محاسبات مورد نیاز ناشی از نمونه‌برداری سریع برمی‌گردد. این امر، به عنوان مثال، در مورد کنترل سازه‌های انعطاف‌پذیر صادق است که مرتبه‌ی مدل ریاضی آن‌ها زیاد است. حجم محاسبات مورد نیاز در چنین سیستمی که مثلاً مرتبه‌ای در حدود ۲۰ دارد و مثلاً الگوریتم کنترل LQG برای آن انتخاب شده‌است بسیار زیاد خواهد بود. نکته‌ی سوم هم به نمونه‌برداری سریع از پاسخ سیستم‌های کند برمی‌گردد، زیرا به علت سرعت نمونه‌برداری، پاسخ سیستم تغییرات بسیار کمی را در دو نمونه‌برداری متوالی نشان خواهد داد که برای ثبت این تغییرات و جلوگیری از پدیده‌ی «پاریز»<sup>۲۹</sup> نیاز به «طول کلمه»<sup>۳۰</sup> بزرگ‌تری در پردازشگر و سایر تجهیزات دیجیتال خواهد بود، که این امر نیز به معنای افزایش قابل توجه در هزینه‌ها است. و سرانجام، عواملی فراتر از موضوع و روش کنترلی وجود دارند که دوره‌تناوب

<sup>۲۸</sup> bilinear      <sup>۲۹</sup> Underflow      <sup>۳۰</sup> Word Length

نمونه‌برداری را مشخص و یا حداقل بر روی انتخاب آن تاثیر می‌گذارند. ریزپردازنده‌ی مورد استفاده امکان دارد فعالیت‌های جانبی دیگری را هم انجام دهد و در نتیجه زمانی که برای انجام اعمال کنترل دیجیتال اختصاص می‌دهد ممکن است محدود باشد. اندازه‌گیرها و عملگرها نیز اصولاً از نوع دیجیتال بوده و یا از طریق درگاه‌های اطلاعاتی و از راه دور با کنترل‌کننده در ارتباط باشند. به این ترتیب، دوره‌تأخیر ارسال و دریافت اطلاعات توسط آن‌ها ممکن است از این طریق مشخص شده و از اختیار طراح خارج شود.

### گسسته‌سازی سیستم تحت کنترل و طراحی کنترل گسسته

گسسته‌سازی سیستم تحت کنترل، به معنای جایگزینی مدل پیوسته‌ی سیستم تحت کنترل یعنی  $G$  با معادل گسسته‌ی آن یعنی  $G_d$  است، مدلی که رفتار سیستم را تنها در لحظه‌های نمونه برداری نمایش می‌دهد. در قدم بعدی باید برای  $G_d$  یک کنترل‌کننده‌ی گسسته،  $K_d$ ، را در چهارچوب یک مسئله‌ی کاملاً گسسته به دست آوریم. مزیت این روش در سادگی آن است. خواهیم دید که اگر سیستم  $G$  در زمان پیوسته، ثابت با زمان باشد آن‌گاه  $G_d$  نیز ثابت با زمان خواهد بود. این روش معایبی هم دارد. در واقع این روش به طور کلی از همه‌ی اتفاق‌ها و نوسان‌های احتمالی پدیده در فاصله‌ی بین دو لحظه‌ی نمونه‌برداری متوالی صرف‌نظر می‌کند. این نوع نوسانات را «نوسان‌های میان نمونه‌ای»<sup>۳۱</sup> می‌نامند. به علت ماهیت متفاوت سیگنال‌های پیوسته و گسسته، مشخصه‌های مطلوب طراحی در حوزه‌ی پیوسته به صورت واضحی به حوزه‌ی گسسته قابل گسترش نیست. همچنین، اگر  $h$  تغییر کند،  $K_d$  باید مجدداً طراحی شود، زیرا  $G_d$  به صورتی پیچیده به  $h$  بستگی دارد.

### طراحی مستقیم کنترل‌کننده‌ی گسسته در زمان پیوسته

در این روش،  $K_d$  را در ساختار کلی یک سیستم استاندارد با نمونه‌گیری و در چهارچوب شکل ۱۰.۱ به دست می‌آورند. مزیت آشکار این روش آن است که طراحی کنترل‌کننده بدون فرض‌های ساده‌کننده انجام می‌گیرد. نقطه ضعفش در سختی آن است، زیرا در این حالت سر و کار ما با یک سیستم متغیر با زمان خواهد بود. در کتاب حاضر، این روش مورد بحث قرار نمی‌گیرد.

## ۴.۱ علائم و قراردادها

استفاده از علائم و قراردادهای مناسب در مطالعه‌ی سیستم‌های با نمونه‌برداری از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در این بخش مجموعه‌ی این قراردادها به صورت خلاصه بیان می‌شوند.

تمام سیستم‌های مورد بررسی در این کتاب از نوع پیوسته هستند. سیستم‌های پیوسته را می‌توان به صورت یک تبدیل خطی از یک فضای برداری از سیگنال‌ها به فضای برداری دیگر و یا همان فضا، در نظر گرفت. سیگنال پیوسته و  $n$  بعدی  $x(t)$  را در نظر بگیرید. فرض کنید که  $t$  می‌تواند هر مقداری در  $\mathbb{R}$  را به خود بگیرد؛ آن‌گاه به

<sup>۳۱</sup> Inter-sampling ripples

ازای هر مقدار  $t$ ،  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ . بنابراین،  $x$  تابعی از  $\mathbb{R}$  به  $\mathbb{R}^n$  است. فرض کنید که  $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  نشان دهنده فضای تمامی توابع این چنینی باشد؛ که آن را فضای برداری تمامی سیگنال‌های پیوسته و  $n$  بعدی می‌نامیم. معمولاً نیازی به ذکر  $n$  نبوده و این فضای برداری را به صورت  $\mathcal{L}(\mathbb{R})$  نمایش می‌دهیم. اگر زمان شروع یک سیگنال در  $t = 0$  باشد، آنگاه سروکار ما با  $\mathbb{R}_+$  خواهد بود و از قرارداد  $\mathcal{L}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$  استفاده خواهیم کرد. حال یک سیگنال گسسته و  $n$  بعدی  $\xi(k)$  را در نظر بگیرید. فرض کنید که  $k$  می‌تواند هر مقداری در  $\mathbb{Z}$  به خود بگیرد، که  $\mathbb{Z}$  مجموعه‌ی اعداد صحیح است. آنگاه،  $\xi(k)$  تابعی از  $\mathbb{Z}$  به  $\mathbb{R}^n$  است. فرض کنید که  $\ell(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^n)$  یا به عبارت ساده‌تر  $\ell(\mathbb{Z})$  نماد فضای تمامی توابع این چنینی باشد؛ که آن را فضای برداری تمامی سیگنال‌های گسسته و  $n$  بعدی می‌نامیم. حال مسئله‌ی استاندارد کنترل با نمونه‌گیری، مطابق شکل ۱۰.۱ را در نظر می‌گیریم، که چهار زیر سیستم آن به شرح زیر هستند:

$$\begin{aligned} G : \mathcal{L}(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}), & K_d : \ell(\mathbb{Z}) &\rightarrow \ell(\mathbb{Z}), \\ S : \mathcal{L}(\mathbb{R}) &\rightarrow \ell(\mathbb{Z}), & H : \ell(\mathbb{Z}) &\rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

وقتی این‌گونه سیستم‌ها را به صورت سری با یکدیگر قرار می‌دهیم، در واقع ترکیبی از تبدیل‌های خطی ایجاد می‌شود؛ به عنوان مثال، مدل گسسته‌ی  $G$ ، یعنی  $SGH$ ، ترکیبی از سه تبدیل خطی زیر است:

$$\ell(\mathbb{Z}) \xrightarrow{H} \mathcal{L}(\mathbb{R}) \xrightarrow{G} \mathcal{L}(\mathbb{R}) \xrightarrow{S} \ell(\mathbb{Z}).$$

نکات دیگر مرتبط با علائم و قراردادها به شرح زیر هستند:

- سیگنال‌های پیوسته را با حروف معمولی و سیگنال‌های گسسته را با حروف یونانی و یا حروف معمولی نشان نمایش می‌دهیم.
- در دیاگرام‌های جعبه‌ای، سیگنال‌های پیوسته را با خط پر و سیگنال‌های گسسته را با خط چین نمایش می‌دهیم.
- در سیگنال‌های پیوسته، به عنوان مثال،  $\dot{x}(t)$  نشان دهنده مشتق زمانی سیگنال  $x(t)$  و در مورد سیگنال‌های گسسته، به عنوان مثال،  $\hat{\xi}(k)$  نشان دهنده‌ی یک قدم پیشروی در زمان است، یعنی  $\hat{\xi}(k) := \xi(k+1)$ .
- تبدیل لاپلاس سیگنال  $x(t)$  با  $\hat{x}(s)$  نمایش داده می‌شود.
- اگر  $G$  یک سیستم خطی و ثابت با زمان با پاسخ ضربه  $g(t)$  باشد، تبدیل لاپلاس  $g(t)$  با  $\hat{g}(s)$  نمایش داده می‌شود (در حالت کلی ماتریس توابع تبدیل). اگر مدل این سیستم را در فضای حالت در نظر بگیریم، آنگاه قرارداد فشرده زیر را برای نمایش تابع تبدیل آن به کار می‌بریم:

$$\left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right],$$

که معادل عبارت  $D + C(sI - A)^{-1}B$  می‌باشد. در ادامه این کتاب و برای ساده‌نویسی به جای  $sI$  از  $s$  استفاده می‌کنیم.

- سنت جاری در مهندسی استفاده از تبدیل  $z$  در حوزه‌ی زمان‌گسسته است. لیکن، تئوری توابع مختلط (مانند تئوری کوشی) عمدتاً با توابعی سروکار دارند که در بیرون دایره‌ی واحد تحلیلی هستند. به این دلیل، برای ما گاهی ساده‌تر است که از تبدیل  $\lambda$  استفاده نماییم که بنا به تعریف  $\lambda = 1/z$ . تبدیل  $\lambda$  برای یک سیگنال گسسته  $\xi(k)$  را به صورت  $\hat{\xi}(\lambda)$  نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\hat{\xi}(\lambda) = \sum_k \xi(k) \lambda^k.$$

به عنوان مثال، تبدیل  $\lambda$  برای یک تابع پله واحد که از زمان  $k = 0$  آغاز شده‌است عبارت است از:

$$1 + \lambda + \lambda^2 + \dots = \frac{1}{1 - \lambda}, \quad |\lambda| < 1$$

- در زمان پیوسته، تابع ضربه‌ی واحد و تابع پله‌ی واحد به ترتیب با  $\delta(t)$  و  $1(t)$  و در زمان گسسته به صورت  $\delta_d(k)$  و  $1_d(k)$  نمایش داده می‌شوند.
- اگر  $G_d$  یک سیستم خطی و ثابت با زمان با پاسخ ضربه  $g(k)$  باشد، تبدیل  $z$  و تبدیل  $\lambda$  برای  $g(k)$  به ترتیب با  $\hat{g}(z)$  و یا  $\hat{g}(\lambda)$  نمایش داده می‌شود (در حالت کلی ماتریس توابع تبدیل). اگر مدل این سیستم را در فضای حالت در نظر بگیریم، آنگاه قرارداد فشرده‌ی زیر را برای نمایش تابع تبدیل آن به کار می‌بریم:

$$\left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right],$$

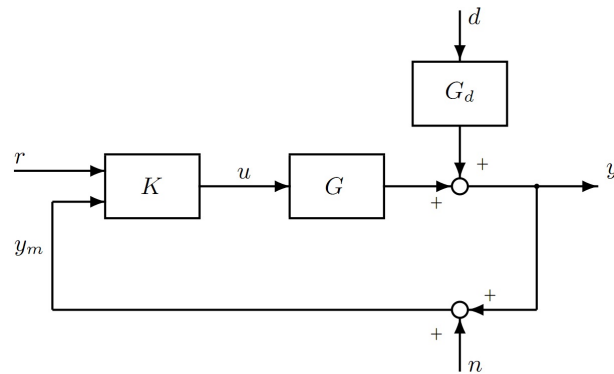
که معادل عبارت  $D + \lambda C(I - \lambda A)^{-1} B$  یا  $D + C(zI - A)^{-1} B$  می‌باشد.

- علایم اختصاری زیر مورد استفاده خواهند بود:  
 LTI: خطی و ثابت با زمان  
 FD: دارای تعداد حالات یا بعد محدود  
 SISO: تک‌ورودی-تک‌خروجی  
 ترکیب این اختصارات، مانند FDLTI، هم به طریق مشابه تعریف می‌شوند.

## ۵.۱ تمرین‌ها

### تمرینات فصل ۱

تمرین ۱.۱ سیستم زیر را در نظر بگیرید:

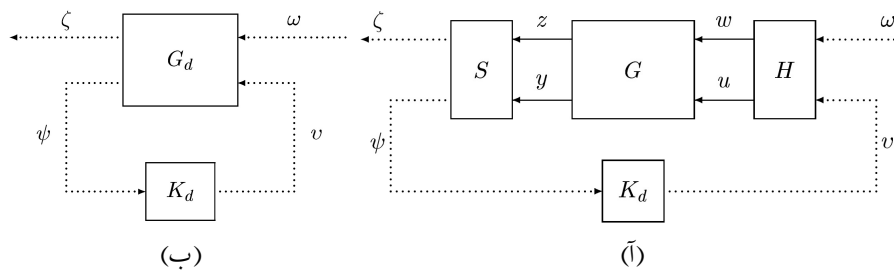


شکل ۱۳.۱ بلوک دیاگرام یک سیستم کنترلی دو درجه آزادی

با در نظر گرفتن متغیرهای زیر تابع تبدیل سیستم تعمیم‌یافته را به دست بیاورید.

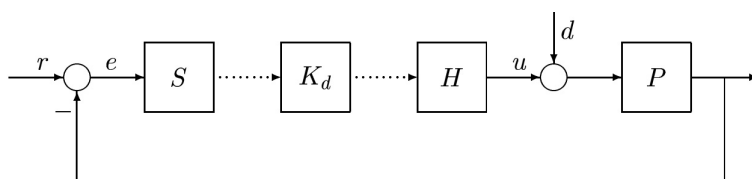
$$\omega = \begin{bmatrix} d \\ r \\ n \end{bmatrix}; z = \begin{bmatrix} y - r \\ u \end{bmatrix}; \nu = \begin{bmatrix} r \\ y_m \end{bmatrix}$$

تمرین ۲.۱ با تعاریف و فرض‌های مناسب نشان دهید که دیاگرام اول (شکل الف) چگونه معادل دیاگرام دوم (شکل ب) خواهد بود؟



شکل ۱۴.۱ بلوک دیاگرام‌های اولیه و ثانویه

تمرین ۳.۱ با فرض  $z = e, y = e, w = \begin{bmatrix} r \\ d \end{bmatrix}$  سیستم زیر را به سیستم دیجیتال استاندارد تبدیل کنید.



شکل ۱۵.۱ بلوک دیاگرام یک سیستم کنترل دیجیتال

## ۶.۱ پروژه‌ها

پروژه ۱ طراحی یک سیستم تعلیق خودرو یک مسئله جالب و چالش برانگیز کنترلی است. وقتی سیستم تعلیق طراحی می شود یک مدل یک چهارم برای ساده سازی مورد استفاده قرار می گیرد که در شکل زیر نشان داده شده است. این مدل یک سیستم تعلیق فعال است که یک عملگر قادر است نیروی کنترلی  $u$  برای کنترل خودرو ایجاد کند. پارامترهای مدل از این قرار هستند:

جرم یک چهارم خودرو:  $M_1 = 2000 \text{ kg}$

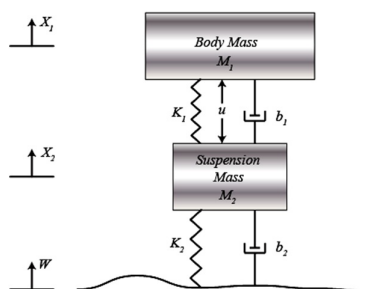
جرم معلق:  $M_2 = 250 \text{ kg}$

ثابت فنریت سیستم تعلیق:  $K_1 = 80 \text{ kN/m}$

ثابت فنریت چرخ و تایر:  $K_2 = 500 \text{ kN/m}$

ثابت میرایی سیستم تعلیق:  $b_1 = 350 \text{ N.s/m}$

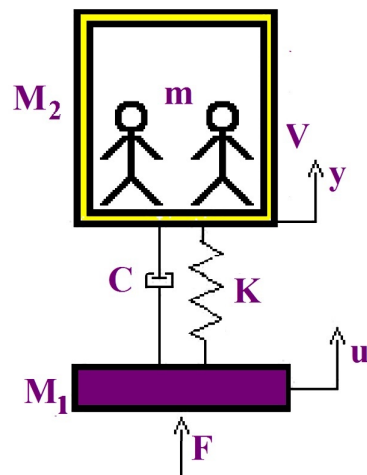
ثابت میرایی چرخ و تایر:  $b_2 = 15000 \text{ N.s/m}$



شکل ۱۶.۱ مدل شماتیک سیستم تعلیق

هدف کنترلی: از آنجا که اندازه گیری  $x_1 - w$  دشوار است و جابجایی  $x_2 - w$  قابل صرف نظر کردن است، می توان  $x_1 - x_2$  را به جای  $x_1 - w$  به عنوان خروجی مسئله در نظر گرفت. در این مسئله یک پله در نظر گرفته می شود. هدف طراحی یک سیستم کنترلی است به گونه ای که خروجی فراجش کمتر از ۵ درصد و زمان نشست کوتاه تر از ۵ ثانیه داشته باشد.

پروژه ۲ مدل آسانسور زیر را در نظر بگیرید:



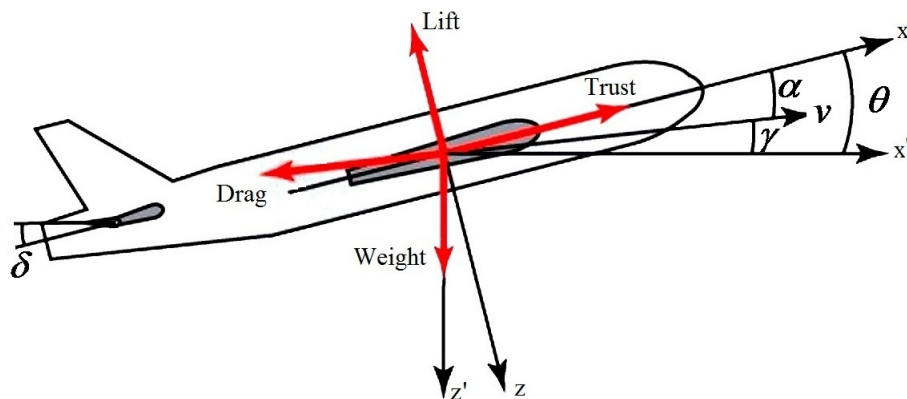
شکل ۱۷.۱ مدل شماتیک آسانسور

ورودی را نیروی  $F$  و خروجی سرعت آسانسور  $V$  در نظر بگیرید. پارامترهای مدل عبارت‌اند از:

$$M_1 = 150\text{ kg}, M_2 = 200\text{ kg}, m = 200\text{ kg}, K = 2\text{ kN/m}, C = 1\text{ N.s/m}$$

هدف کنترلی: هدف طراحی یک سیستم کنترلی است به گونه‌ای که پاسخ به فرمان پله واحد، زمان نشست کمتر از ۴ ثانیه و فراجهش کمتر از ۱۰ درصد داشته باشد.

پروژه ۳ تحت فرضیات و شرایطی می‌توان معادلات حرکت یک هواپیما را به معادلات خطی در راستای طولی و عرضی تقلیل داد. در این پروژه هدف طراحی سیستم کنترل خودکار انحراف از حالت افقی هواپیما است. محورهای مختصات و نیروی‌های وارد بر هواپیما در شکل زیر نشان داده شده‌است.



شکل ۱۸.۱ مدل شماتیک کنترل وضعیت هواپیما

فرض شود که هواپیما در حالت پرواز پایدار یعنی ارتفاع و سرعت ثابت است. همچنین برای ساده‌سازی بیشتر مسئله فرض می‌شود که تغییر زاویه انحراف افقی هواپیما تاثیری در سرعت هواپیما ندارد. ورودی کنترلی

تغییر زاویه بالک و خروجی تغییر زاویه افقی است. معادلات حرکت در این حالت به صورت زیر خلاصه می‌شود:

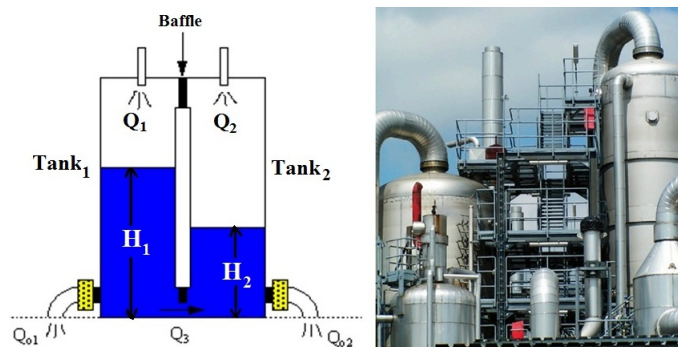
$$\dot{\alpha} = -0.3\alpha + 55q + 0.25\delta,$$

$$\dot{q} = -0.14\alpha - 0.45q + 0.2\delta,$$

$$\dot{\theta} = 55q.$$

هدف کنترلی: پاسخ خروجی به ورودی پله فراجش کمتر از ۱۰ درصد، زمان صعود کمتر از ۲ ثانیه، زمان نشست کوتاه‌تر از ۱۰ ثانیه و خطای حالت ماندگار کمتر از ۲ درصد باشد.

پروژه ۴ دو تانک به صورت زیر با هم در ارتباط هستند. دبی ورودی به هر مخزن توسط شیرهای ۱ و ۲ تنظیم می‌شود و هدف کنترل سطح مایع درون مخازن ۱ و ۲ است. معادلات این سیستم به صورت زیر است:



شکل ۱۹.۱ مدل شمایک کنترل سطح تانکهای مرتبط

$$\dot{H}_1 = -\alpha_1 \sqrt{2gH_1} + \beta_1 Q_1$$

$$\dot{H}_2 = \alpha_1 \sqrt{2gH_1} - \alpha_2 \sqrt{2gH_2} + \beta_2 Q_2$$

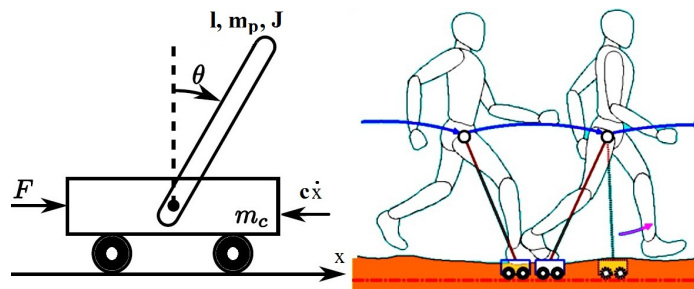
پارامترهای مدل عبارت‌اند از:

$$\alpha_1 = 0.025, \alpha_2 = 0.018, \beta_1 = 0.08, \beta_2 = 0, H_1(0) = 12cm, H_2(0) = 10cm$$

هدف کنترلی: هدف طراحی یک سیستم کنترلی است به گونه‌ای که در اثر اغتشاش پله (تغییر یک سانتی‌متری ناگهانی در ارتفاع مخزن ۱)، سیستم با زمان صعود کمتر از ۱۵ ثانیه و فراجش کمتر از ۲۰ درصد و بدون خطای ماندگار به شرایط اولیه بازگردد.

پروژه ۵ مدل پاندول معکوس یک مسئله‌ی متداول کنترلی است که می‌تواند مدل ساده شده‌ی ربات‌های راه‌رونده باشد. شکل زیر یک مدل دو درجه آزادی را نشان می‌دهد. پارامترهای مدل عبارت‌اند از:

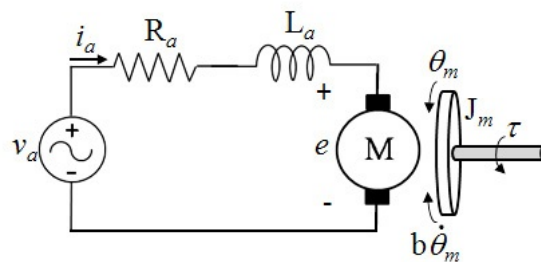
$$m_c = 0.5kg, m_p = 0.5kg, c = 0.1N.s/m, l = 0.3m, J_p = 0.05kg.m^2$$



شکل ۲۰.۱ مدل شماتیک ربات راه رونده

هدف کنترلی: هدف طراحی یک سیستم کنترلی است به گونه‌ای که در اثر اغتشاش ضربه  $1\text{N}\cdot\text{sec}$  وارد بر پایه، انحراف زاویه از حالت عمودی پاندول از  $15^\circ$  درجه بیشتر نشود و زمان نشست (بازگشت به حالت تعادل) آن کوتاه‌تر از  $5$  ثانیه و خطای حالت ماندگار آن کمتر از  $2^\circ$  درصد باشد.

پروژه ۶ مدار الکتریکی یک موتور الکتریکی در شکل زیر نشان داده شده‌است:



شکل ۲۱.۱ مدل شماتیک موتور الکتریکی

پارامترهای این سیستم به صورت زیر است:

$$m = 0.1\text{kg}\cdot\text{m}^2, b = 0.05\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}, k_b = 0.1\text{V}\cdot\text{s}/\text{rad}, k_t = 0.1\text{N}\cdot\text{m}/\text{amp}$$

$$R_a = 1\Omega, L_a = 0.05\text{H}$$

هدف کنترلی: هدف طراحی یک سیستم کنترل دور است به گونه‌ای که پاسخ پله واحد سیستم با زمان نشست کمتر از  $2$  ثانیه و فراجهش کمتر از  $5$  درصد و خطای ماندگار کمتر از  $1^\circ$  درصد داشته باشد.

پروژه ۷ بلوک دیاگرام دستگاه ورزشی کنترل ضربان قلب با مدل ریاضی زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_1 = -a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + 2u(t)$$

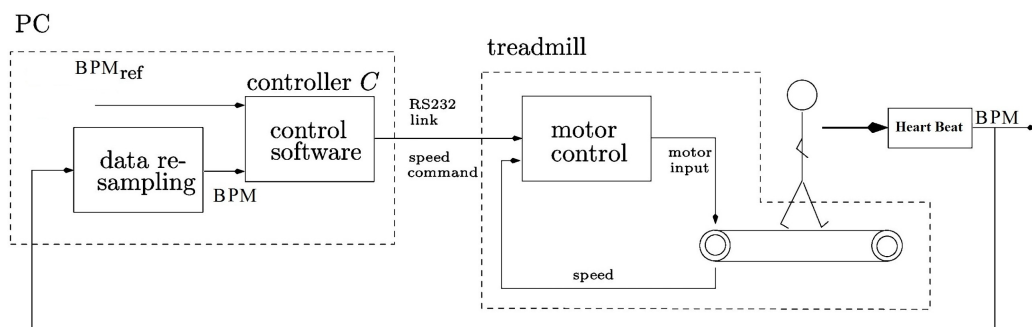
$$\dot{x}_2 = -a_2 x_2(t) + \frac{a_2 x_1(t)}{1 + e^{-(x_1(t) - a_0)}}$$

$$z(t) = x_1(t)$$

که در روابط فوق  $z(t)$  تغییر ضربان قلب از حالت استراحت است و ضرایب  $a_1 \dots a_5$  از روش‌های شناسایی سیستم به صورت زیر تخمین زده شده‌اند:

$$a_1 = 1/85, a_2 = 25, a_3 = 0/06, a_4 = 0/003, a_5 = 8/5$$

هدف این است که ضربان قلب در مدت حداکثر ۱۵ ثانیه به میزان ۱۰ ضربان بر دقیقه با خطای ماندگار حداکثر ۵ درصد افزایش یابد و افزایش ضربان هیچ‌گاه از ۱۲ ضربان بر دقیقه بیشتر نشود.



شکل ۲۲.۱ مدل شماتیک کنترل ضربان قلب

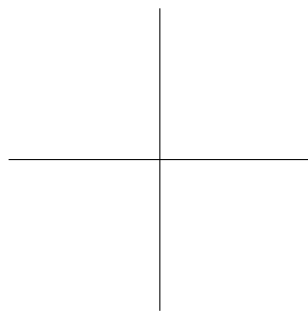
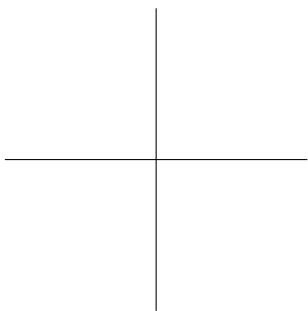
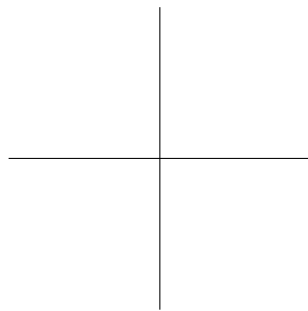
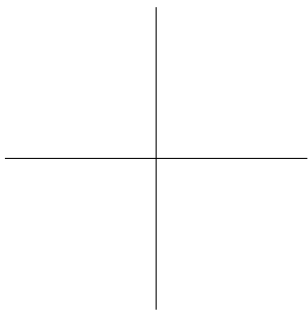
پروژه - خواسته ۱.۱ معادلات دینامیکی خطی حاکم را به دست آورید. در صورت نیاز از روش خطی‌سازی استفاده نمایید.

پروژه - خواسته ۲.۱ تابع تبدیل این سیستم را به دست آورید.

پروژه - خواسته ۳.۱ معادلات فضای حالت سیستم را به دست آورید و کنترل‌پذیری و رؤیت‌پذیری سیستم را بررسی کنید.

پروژه - خواسته ۴.۱ پاسخ سیستم حلقه‌باز را رسم نمایید.

پروژه - خواسته ۵.۱ دیاگرام جعبه‌ای استاندارد یک سیستم کنترل دیجیتال را برای این سیستم مشخص کنید.



# مدل‌های فرکانسی و زمانی سیگنال‌ها و سیستم‌های گسسته

مدل‌های فرکانسی برای سیستم‌های خطی و ثابت با زمان، امکان استفاده از خاصیت ضرب شونده‌ی توابع تبدیل را فراهم می‌آورند. تبدیل  $z$  و تبدیل  $\lambda$  دو نمونه از این مدل‌هاست. سنت جاری در مهندسی، استفاده از تبدیل  $z$  در حوزه‌ی زمان گسسته است. با توجه به آنکه تئوری توابع مختلط (مانند تئوری کوشی) عمدتاً با توابعی سروکار دارند که در بیرون دایره‌ی واحد تحلیلی هستند. به این دلیل، برای ما گاهی ساده‌تر است که از تبدیل  $\lambda$  به جای تبدیل  $z$  استفاده نماییم. در هر صورت همواره می‌توان با استفاده از رابطه‌ی  $\lambda = \frac{1}{z}$  این دو مدل را به سادگی به یکدیگر تبدیل نمود.

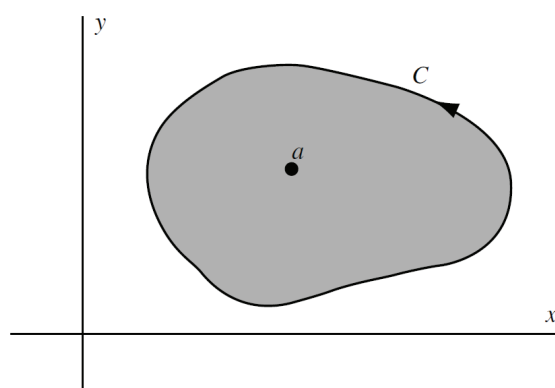
## ۱.۲ مروری بر توابع مختلط تحلیلی

فرض کنید که تابع  $G$  یک تابع مختلط تعریف شده بر روی صفحه‌ی مختلط باشد. فرض کنید که  $z$  در دامنه‌ی تعریف تابع  $G$  واقع شده باشد. این دامنه را به صورت یک دیسک با شعاع محدود و با مرکزیت  $z$  فرض می‌کنیم. بنابراین تابع  $G$  در نقطه‌ی  $z$  و در درون دیسکی که به مرکزیت آن فرض کرده‌ایم تعریف شده است. تابع  $G$  را تحلیلی گویند اگر مشتقات آن در نقطه‌ی  $z$  و در تمامی نقاطی که در همسایگی  $z$  قرار دارند وجود داشته باشند.

## ۱.۱.۲ قضیه کوشی

مسیر مختلط یا کانتور<sup>۱</sup>، قوس تکه-تکه صافی است که از تعدادی قوس‌های صاف به هم پیوسته تشکیل شده است. یک مسیر مختلط ساده و بسته، مسیری است که خودش را قطع نمی‌کند و بر روی خودش به پایان می‌رسد. فرض کنید که  $C$  یک مسیر مختلط بسته همانند شکل ۱.۲ بوده و تابع  $G$  در تمامی نقاط درونی مانند نقطه‌ی  $a$  و بر روی مسیر  $C$  تحلیلی باشد. قضیه‌ی کوشی بیان می‌دارد که:

$$\oint_C G(z) dz = 0. \quad (1.2)$$



شکل ۱.۲ یک مسیر بسته‌ی غیر متقاطع در صفحه‌ی مختلط با جهت حرکت مثبت

یکی از نتایج فرعی این قضیه به شرح زیر است:  
فرض کنید که  $C_1$  و  $C_2$  دو مسیر مختلف برای اتصال نقاط  $A_1$  و  $A_2$  در شکل ۲.۲ باشند، آنگاه داریم:

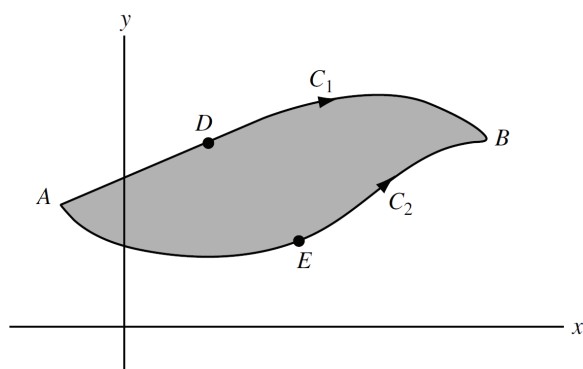
$$\int_{C_1} G(z) ds = \int_{C_2} G(z) ds.$$

## ۲.۱.۲ بسط لوران

فرض کنید که  $C_1$  و  $C_2$  دو دایره‌ی هم مرکز، به ترتیب، با شعاع‌های  $R_1$  و  $R_2$  و مرکز  $a$  باشند. تابع تک‌مقداری  $G(z)$  که در حلقه‌ی  $R$ ، محصور بین  $C_1$  و  $C_2$ ، تحلیلی است را در نظر بگیرید (شکل ۳.۲)، اگر  $a + h$  یک نقطه‌ی دلخواه درون  $R$  باشد، آنگاه داریم:

$$G(a + h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \dots + \frac{a_{-1}}{h} + \frac{a_{-2}}{h^2} + \frac{a_{-3}}{h^3} + \dots \quad (2.2)$$

<sup>۱</sup>Contour

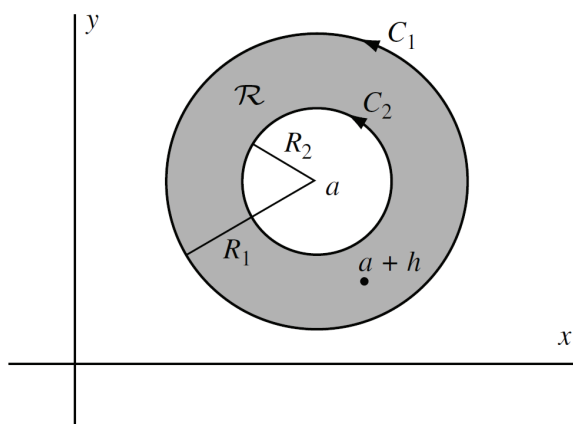


شکل ۲.۲ دو مسیر مختلف بین دو نقطه A و B در صفحه‌ی مختلط

که در اینجا

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{G(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} (z-a)^{n-1} G(z) dz \quad n = 1, 2, 3, \dots$$



شکل ۳.۲ ناحیه‌ی تحلیلی R محصور بین دو مسیر C1 و C2.

جهت انتگرال‌گیری بر روی C1 و C2 نیز در جهت خلاف عقربه‌های ساعت نسبت به داخل آنهاست. انتگرال‌گیری‌های بالا را می‌توان بر روی دایره‌ی C که هم مرکز با C1 و C2 بوده و در ناحیه‌ی مابین آنها قرار دارد انجام داد، که در این صورت به یک فرمول یکسان برای کلیه‌ی ضرایب بسط لوران می‌توان رسید:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{G(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.2)$$

با یک تغییر در نمایش بسط لوران به شکل جدیدی که برای ما کاربرد بیشتری دارد می‌رسیم:

$$G(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots + \frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{a_{-3}}{(z-a)^3} + \dots \quad (5.2)$$

بخش  $a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots$  در بسط لوران را بخش تحلیلی و بقیه‌ی این بسط که شامل توان‌های منفی  $z-a$  است را بخش اصلی می‌نامند. اگر بخش اصلی برابر با صفر باشد، آنگاه بسط لوران به بسط تیلور تبدیل می‌شود.

### ۳.۱.۲ قضیه‌ی باقی‌مانده‌ها

اگر تابع  $G(z)$  در نقطه‌ی  $a$  تحلیلی نباشد آنگاه به  $a$  یک نقطه‌ی تکین<sup>۲</sup> می‌گویند. اگر به ازای یک مقدار  $\delta > 0$  و در ناحیه‌ی  $|z-a| < \delta$ ، و به غیر از خود نقطه‌ی  $a$ ، تابع  $G(z)$  تحلیلی باشد، آنگاه  $a$  را نقطه‌ی تکین منفرد<sup>۳</sup> می‌گویند. فرض کنید که  $G(z)$  یک تابع کسری باشد (یعنی صورت و مخرج آن چند جمله‌ای باشند). اگر صورت و مخرج هر دو تحلیلی باشند، آنگاه کسر نیز در تمامی نقاط، به غیر از در محل ریشه‌های مخرج، یعنی قطب‌های تابع، تحلیلی خواهد بود. اما به عنوان مثال، تابع:

$$G(z) = \frac{1}{\sin(\pi/z)}$$

دارای نقاط منفرد بی‌شماری در  $z = \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \dots$  است که همگی بر روی محور حقیقی و در فاصله‌ی  $0 < |z| \leq 1$  قرار دارند. نکته‌ی قابل توجه آن است که نقطه‌ی  $z = 0$  یک نقطه‌ی تکین غیر منفرد است زیرا در هر همسایگی آن نقاط تکین بی‌شماری وجود دارند.

اگر تابع  $G(z)$  در همسایگی نقطه‌ی  $a$  تحلیلی باشد، بسط لوران آن حول نقطه‌ی  $a$  به صورت رابطه‌ی (۵.۲) نوشته می‌شود. ضرب  $a_{-1}$  را باقی‌مانده‌ی تابع  $G(z)$  در قطب  $a$  می‌نامند که براساس رابطه‌ی (۴.۲)، به شکل زیر به دست می‌آید:

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C G(z) dz \quad (6.2)$$

معمولاً رابطه‌ی (۶.۲) را به عنوان فرمولی برای محاسبه‌ی باقی‌مانده مورد استفاده قرار نمی‌دهند، بلکه از آن به عنوان روشی برای محاسبه‌ی انتگرال مختلط  $\oint_C G(z) dz$  استفاده می‌کنند. برای چنین منظوری لازم است که مقدار باقی‌مانده‌ی تابع  $G(z)$  در نقطه‌ی  $a$  را از رابطه‌ی (۷.۲) به دست آوریم. به طور خاص، اگر  $a$  یک نقطه‌ی منفرد (قطب) با تعداد تکرار  $k$  باشد، آنگاه

$$\text{Res}\{G(z); a\} := a_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(k-1)!} \left[ \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z-a)^k G(z) \right]. \quad (7.2)$$

<sup>۲</sup>Singular      <sup>۳</sup>Isolated

و در نتیجه

$$\oint_C G(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}\{G(z); a\} \quad (۸.۲)$$

بر طبق قضیه‌ی باقی‌مانده‌ها، در صورتی که تابع  $G(z)$  بر روی یک مسیر بسته‌ی غیر متقاطع  $C$  تحلیلی بوده و در داخل آن هم تنها در  $M$  نقطه‌ی منفرد  $z_i$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ) غیر تحلیلی باشد، آنگاه انتگرال  $G(z)$  بر روی مسیر  $C$  از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\oint_C G(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^M \operatorname{Res}\{G(z); z_i\} \quad (۹.۲)$$

### ۴.۱.۲ توسعه‌بخشی تحلیلی

فرض کنید که اطلاعات ما از شکل دقیق یک تابع تحلیلی  $f(z)$  محدود به ناحیه‌ی داخلی یک دایره‌ی همگرایی  $C_1$  با مرکز  $a$  باشد (شکل ۴.۲). تابع  $f(z)$  را می‌توان با استفاده از بسط تیلور به صورت زیر نوشت:

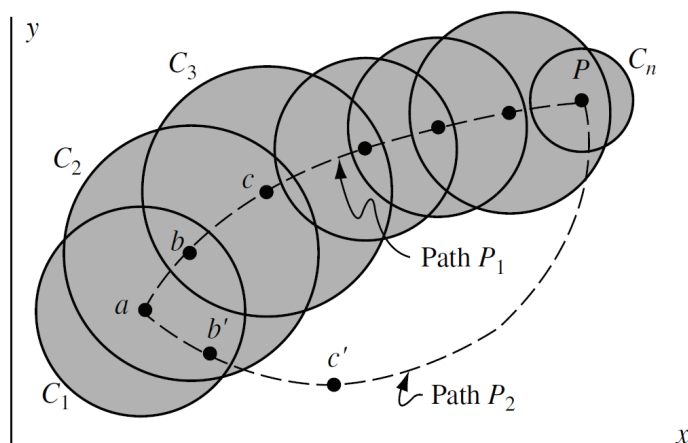
$$a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots \quad (۱۰.۲)$$

با انتخاب نقطه‌ای مانند  $b$  در ناحیه‌ی داخلی  $C_1$ ، و با استفاده از رابطه‌ی زیر مقدار  $f(z)$  و مشتق آن را محاسبه نموده و یک بسط تیلور جدید را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$b_0 + a_1(z-b) + a_2(z-b)^2 + \dots \quad (۱۱.۲)$$

دایره‌ی همگرایی این بسط را  $C_2$  می‌نامیم. اگر  $C_2$  فراتر از  $C_1$  توسعه یابد، آنگاه مقدار تابع  $G(z)$  و مشتق آن در این ناحیه‌ی توسعه‌یافته قابل محاسبه خواهد بود. به این ترتیب به تدریج اطلاعات ما از تابع  $G(z)$  اضافه می‌شود. در چنین حالتی می‌گوییم که تابع  $G(z)$  به صورت تحلیلی به ناحیه‌ای فراتر از  $C_1$  توسعه داده شده‌است. این فرآیند را می‌توان به صورت غیر محدود و با انتخاب یک نقطه‌ی جدید  $c$  ادامه داد تا به ناحیه‌های جدید  $C_2$  و الی آخر دست پیدا نماییم.

در فرآیند توسعه‌بخشی تحلیلی باید از نقاط منفرد احتراز شود. به عنوان مثال، در شکل ۴.۲ هیچ نقطه‌ی منفردی در داخل ناحیه‌ی  $C_2$  و بر روی  $C_1$  نباید وجود داشته باشد، زیرا در غیر این صورت بسط تیلور مربوط واکرا خواهد شد. گاهی ممکن است که تعداد نقاط منفرد بر روی مرز یک دایره‌ی همگرایی آن قدر زیاد باشد که توسعه‌بخشی تحلیلی عملاً امکان‌پذیر نباشد. در شکل ۴.۲ برای حرکت از دایره‌ی  $C_1$  به سوی دایره‌ی  $C_n$ ، ما از مسیر  $P_1$  استفاده کرده‌ایم. برای این منظور بی‌نهایت مسیر دیگر نیز ممکن است قابل انتخاب باشد. نکته‌ی جالب آن است که مادامی که ناحیه‌ی محصور بین مسیرهای متفاوت  $P_1$  و  $P_2$  فاقد نقاط منفرد باشد، بسط تیلور به دست آمده در ناحیه‌ی  $C_n$  به مسیر طی شده بستگی نداشته و دقیقاً به صورت یکسان به دست خواهد آمد. به عبارت دیگر، تحت شرایط گفته‌شده، توسعه‌ی تحلیلی تابع به صورت یکتا به وقوع خواهد پیوست.



شکل ۴.۲ توسعه بخشی تحلیلی

## ۲.۲ تبدیل $z$

در تحلیل سیستم‌های پیوسته، استفاده از تبدیل لاپلاس نقش مهمی را ایفا می‌کند. با استفاده از تبدیل لاپلاس، امکان تعریف و استفاده از توابع تبدیل و تعبیر فرکانسی از رفتار دینامیکی سیستم‌های پیوسته خطی فراهم می‌آید. تلفیق جنبه‌های زمانی و فرکانسی رفتار سیستم‌های خطی به نوبه‌ی خود درک جدیدی از ماهیت و خواص این سیستم‌ها را فراهم می‌آورد.

در حوزه‌ی سیستم‌های گسسته، تبدیل  $z$ ، نقشی مشابه با تبدیل لاپلاس در سیستم‌های پیوسته را بازی می‌کند. با این ابزار می‌توان رفتار معادلات تفاضلی تحت شرایط اولیه‌ی دلخواه را مورد بررسی و تحلیل قرار داد. تبدیل  $z$ ، در واقع یک دنباله‌ی زمانی نیمه‌بی‌نهایت را به یک تابع مختلط نگاشت می‌کند. برای سیگنالی به شکل

$$x(k) = \{x(0), x(1), \dots\},$$

تبدیل  $z$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \hat{x}(z) &:= x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}. \end{aligned} \quad (12.2)$$

همچنین معکوس تبدیل  $z$  نیز با استفاده از رابطه‌ی تحلیلی زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} Z^{-1}[\hat{x}(z)] &= \{x(kh)\} = \{x(k)\} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c \hat{x}(z) z^{k-1} dz \end{aligned} \quad (13.2)$$

که  $c$  دایره‌ای در صفحه‌ی  $z$  است که مرکز آن در مبدأ مختصات قرار داشته و همه‌ی قطب‌های تابع  $\hat{x}(z)$  را در درون خود قرار می‌دهد.

مثال ۱.۲.۲ سیگنال گسسته موسوم به ضربه واحد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta_d(k) := \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k > 0 \end{cases}$$

تبدیل  $z$  این سیگنال با استفاده از رابطه‌ی ۲.۲ به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathcal{Z}\{\delta_d(z)\} = 1. \quad (14.2)$$

مثال ۲.۲.۲ تبدیل  $z$  برای سیگنال گسسته معادل برای تابع پله‌واحد به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x(t) = 1(t) := \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}.$$

معادل گسسته‌ی این تابع عبارت است از:

$$1_d(k) := \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k \leq 0 \end{cases}$$

بنابراین تبدیل  $z$  آن به صورت زیر خواهد بود:

$$\hat{x}(z) = \mathcal{Z}[1_d(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} 1 z^{-k} = \frac{1}{1 - z^{-1}}. \quad (15.2)$$

محدوده‌ی همگرایی سری فوق به ازای مقادیری از  $z$  است که  $|z| > 1$ .  
به طور کلی برای سری‌های هندسی داریم:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots = \frac{a}{1 - r}, \quad \|r\| < 1.$$

مثال ۳.۲.۲ تابع نمایی پیوسته زیر را در نظر بگیرید:

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & 0 \leq t \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

مقادیر سیگنال گسسته‌ی متناظر با یک تابع نمایی پیوسته به صورت زیر است:

$$x(k) = e^{-akh}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

تبدیل  $z$  این سیگنال نیز با استفاده از رابطه‌ی ۲.۲ به دست می‌آید:

$$\hat{x}(z) = \mathcal{Z}[e^{-akh}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akh} z^{-k} = \frac{1}{1 - e^{-ah} z^{-1}}.$$