معادلات دیفرانسیل معمولی
با Matlab

تألیف:

دکتر هادی رضازاده– دانشگاه تخصصی فناوری‌های نوین آمل
دکتر جواد وحیدی– دانشگاه علم و صنعت ایران

فن‌آوری نوین

سرشناسه	:	رضازاده، هادی، ۱۳۶۲-
عنوان و نام پدیدآور	:	معادلات دیفرانسیل معمولی با **Matlab** / تالیف هادی رضازاده، جواد وحیدی.
مشخصات نشر	:	بابل: فناوری نوین، ۱۳۹۹.
مشخصات ظاهری	:	۲۹۸ ص.: مصور(جدول).
شابک	:	۶۵۰۰۰۰ ریال 978-622-7393-09-5
وضعیت فهرست نویسی	:	فیپا
موضوع	:	متلب
موضوع	:	**MATLAB**
موضوع	:	معادله‌های دیفرانسیل -- راهنمای آموزشی (عالی)
موضوع	:	**Differential Equations -- Study and teaching (Higher)**
موضوع	:	معادله‌های دیفرانسیل -- مسائل، تمرین‌ها و غیره (عالی)
موضوع	:	**Differential Equations -- Problems, exercices, etc. (Higher)**
شناسه افزوده	:	وحیدی، جواد، ۱۳۴۹ -
شناسه افزوده	:	**Vahidi, Javad**
رده بندی کنگره	:	**QA**۳۷۱
رده بندی دیویی	:	۵۱۵/۳۵
شماره کتابشناسی ملی	:	۷۳۱۷۱۰۳

www.fanavarienovin.net

فن آوری نوین   بابل، کدپستی ۴۷۱۶۷-۷۳۴۴۸   تلفن: ۰۱۱-۳۲۲۵۶۶۸۷

معادلات دیفرانسیل معمولی با Matlab

تألیف: هادی رضا زاده / جواد وحیدی

نوبت چاپ: چاپ اول

سال چاپ: تابستان ۹۹

شمارگان: ۲۰۰

قیمت: ۶۵۰۰۰ تومان

نام چاپخانه و صحافی:

شابک: 978-622-7393-09-5

نشانی ناشر: بابل، چهارراه نواب، کاظم‌بیگی، جنب مسجد منصور کاظم‌بیگی، طبقه اول

طراح جلد:

تهران، خ اردیبهشت، نبش وحید نظری، پلاک ۱۴۲   تلفکس: ۶۶۴۰۰۲۲۰-۶۶۴۰۰۱۴۴

فهرست مطالب

مقدمه

در دنیایی زندگی می‌کنیم که پدیده‌ها دائماً در حال تغییر هستند. در بسیاری از موارد می‌توان این دگرگونی‌ها را با نامعادله دیفرانسیل توصیف کرد. به‌عنوان‌مثال، آلبرت انیشتین به‌منظور توصیف نیروی گرانشی از معادلات دیفرانسیل استفاده کرد؛ او به کمک این معادلات هم این نیرو را توضیح داد و هم ثابت کرد که امکان سفر به آینده امکان‌پذیر است.

تصور کنید که می‌خواهید به مسافرت بروید. احتمالاً با روش‌های مختلفی می‌توانید این کار را انجام دهید. مثلاً سفر با هواپیما، خودرو شخصی و یا حتی ممکن است با پای خود قصد سفر کنید. البته اگر هدف شما سفر به کهکشان دیگری باشد احتمالاً بایستی چند صدسال منتظر بمانید تا ابزار مناسب این سفر اختراع شود!

حل کردن معادلات دیفرانسیل نیز همانند سفر رفتن است و احتمال دارد با چند روش بتوانید یک معادله دیفرانسیل را حل کنید .

در این کتاب ضمن معرفی انواع معادلات دیفرانسیل معمولی به تکنیک‌های حل آن‌ها پرداخته می‌شود. بعلاوه برای آشنایی خوانندگان عزیز با نحوه حل معادلات دیفرانسیل معمولی با matlab، فصلی از کتاب را به آن اختصاص دادیم.

در پایان جا دارد از مدیر محترم انتشارات فناوری نوین جناب آقای دکتر رمضان عباس نژاد که زحمت چاپ و نشر این کتاب را به عهده گرفتند تشکر و قدردانی شود.

از تمامی اساتید و دانشجویان عزیز تقاضا داریم، هرگونه اشکال، ابهام در متن کتاب، پیشنهاد و انتقادات را به آدرس پست الکترونیک **fanavarienovin@gmail.com** ارسال نمایند.

مؤلفین

دکتر هادی رضازاده

دکتر جواد وحیدی

فصل ۱ مقدمه‌ای بر معادلات دیفرانسیل

مقدمه

حل بسیاری از مسائل در علوم و مهندسی منجر به حل معادله دیفرانسیل می‌شود. به‌عنوان‌مثال به نمونه‌های زیر توجه کنید:

- **مدل‌سازی** نحوه انتشار ویروس Covid-19
- **استراتژی‌های بهینه برای سرمایه‌گذاری در بورس**
- پیگیری میزان بروز نشانه‌های ایدز در بیماران HIV–مثبت
- پیش‌بینی وضع آب‌وهوا
- تغییرات عرضه و تقاضا در علم اقتصاد
- **زمان لازم برای جذب یک دارو**
- واکنش بین دو یا چندگونه خاص جانوری در یک جزیره

خصوصیات ذاتی هر یک از این مسایل را می‌توان با استفاده از یک یا چند معادله دیفرانسیل بیان کرد.

معمولاً مدل ریاضی این پدیده‌ها، منجر به یک معادله دیفرانسیل می‌شود. برای یافتن معادله دیفرانسیل مناسب هر پدیده، نخست لازم است که وضعیت طبیعی را به‌صورت یک عبارت ریاضی بیان کنیم. برای این کار عموماً درباره آنچه اتفاق می‌افتد، فرضیاتی می‌شود که با پدیده مشاهده‌شده سازگارند. به‌عنوان‌مثال مشاهده‌شده است که میزان از بین رفتن مواد رادیواکتیو با مقدار آن ماده متناسب است، میزان عبور حرارت از جسم گرم‌تر به جسم سردتر با اختلاف دما متناسب است. حرکت اجسام در فضا طبق قانون نیوتن انجام می‌گیرد، میزان رشد جمعیت حشرات با جمعیت موجود متناسب است و غیره. مشاهده می‌شود مسایل نظیر آن همواره با میزان تغییر (مشتق) یک تابع نسبت به متغیرهای آن تابع همراه است. مدل ریاضی همه این مسایل، معادلات دیفرانسیل متناسب با آن پدیده است.

در بخش بعدی معادلات دیفرانسیل را معرفی می‌کنیم و درباره برخی از کاربردهای آن صحبت می‌کنیم.

۱–۱. مفاهیم پایه‌ای

۱–۱–۱. معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی

معادله **دیفرانسیل** نوعی معادله ریاضی است که بیان‌گر یک تابع مجهول از یک یا چند متغیر مستقل و مشتق هایی با مرتبه‌های مختلف نسبت به متغیرهای مستقل است.

معادلات دیفرانسیل در بسیاری از پدیده‌های علمی رخ می‌دهند. هر زمان که یک رابطه بین چند متغیر با مقادیر مختلف در حالت‌ها یا زمان‌های مختلف وجود داشته و نرخ تغییرات متغیرها در زمان‌های مختلف یا حالات مختلف شناخته‌شده باشند می‌توان آن پدیده را با معادلات دیفرانسیل بیان کرد.

معادلات دیفرانسیل معمولی

تعریف ۱،۱،۱

یک معادله دیفرانسیل **معمولی (ODE) معادله‌ای شامل تابع مجهولی از یک متغیر که متغیر مستقل نام دارد، و یک یا چند مشتق آن است.**

مثال ۱،۱،۱

یک معادله دیفرانسیل معمولی

یک معادله دیفرانسیل ساده با برخی از عناصر آن در زیر نشان داده‌شده است:

$$۳\frac{dy}{dt} = y$$

که در آن y تابع مجهول و t متغیر مستقل می‌باشند.

این معادله تابع مجهولی از t را توصیف می‌کند که با سه برابر مشتق خود برابر است. به‌بیان‌دیگر این معادله دیفرانسیل، تابعی را توصیف می‌کند که سرعت تغییر آن متناسب با اندازه آن در هر زمان به نسبت یک‌به‌سه می‌باشد.

معادلات زیر نمونه‌هایی از معادله دیفرانسیل معمولی هستند:

$$y' + y = x^2, \sin y' + \tan^{-1} y = 1$$

سه معادله:

$$\frac{dy}{dx} + ۲xy = e^{-x^۲}$$
$$x''(t) - ۵x'(t) + ۶x(t) = ۰$$
$$\frac{dx}{dt} = \frac{۳t^۲ + ۴t + ۲}{۲(x - ۱)}$$

رابطه بین متغیرهای مستقل و وابسته را به‌وضوح نشان داده‌اند. اما در معادله‌ای مانند

$(w')^۲ + ۲t^۳w' - ۴t^۲w = ۰$،

باید متوجه باشیم که تابع w در حقیقت به‌صورت w(t)، یعنی تابعی از متغیر مستقل t است.

در بسیاری از کاربردهای عملی، متغیر مستقل زمان است و با t نشان داده می‌شود، و می‌توانیم مشتقات توابع را به‌صورت نمادگذاری نیوتن[1] نشان دهیم، به‌عنوان‌مثال به معادله $\ddot{x}+3t\dot{x}+2x=\sin(\omega t)$ توجه کنید. مهم نیست چه حروفی برای نشان دادن متغیرهای مستقل و وابسته استفاده‌شده‌اند و اهمیتی ندارد که مشتقات به چه صورتی نشان داده‌شده‌اند.

مثال ۲,۱,۱

فرض کنید ماده رادیواکتیویته‌ای داریم. می‌خواهیم بدانیم جرم آن بعد از t ساعت چقدر می‌شود ؟
می‌دانیم میزان متلاشی شدن ماده متناسب با جرم موجود آن ماده است. اگر y جرم آن باشد در این صورت داریم:

$$\frac{dy}{dt}=-ky \implies \frac{dy}{y}=-k\,dt \implies \ln y=-kt+\ln c$$
$$\implies ln\frac{y}{c}=-kt \implies \frac{y}{c}=e^{-kt} \implies y=ce^{-kt}$$

حال اگر فرض کنیم در $t=0$، $y=7$ گرم بوده است در این صورت $7=ce^{0} \implies c=7$ و جواب خصوصی به‌صورت $y=7e^{-kt}$ می‌باشد. مثلاً اگر بخواهیم بدانیم بعد از چه مدتی جرم آن نصف می‌شود به‌جای y، $\frac{y}{2}$ قرار می‌دهیم و t را به دست می‌آوریم:

$$\frac{y}{2}=7e^{-kt} \implies \frac{y}{14}=e^{-kt} \implies -kt=ln\frac{y}{14}$$
$$\implies t=\frac{-1}{k}ln\frac{y}{14}$$

که در آن k ثابتی است که تحت شرایط خاصی می‌توان آن را به دست آورد.

مثال ۳,۱,۱

اگر c_1,c_2 ثابت باشند آنگاه با دو بار مشتق گرفتن از ضابطه $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}$ داریم:

$$\begin{cases} y=c_1e^{x}+c_2e^{2x} \\ y'=c_1e^{x}+2c_2e^{2x} \\ y''=c_1e^{x}+4c_2e^{2x} \end{cases}$$

که با حذف c_1,c_2 در دستگاه فوق داریم :

$$y''-3y'+2y=0$$

که بیان‌گر معادله دیفرانسیلی است که $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}$ در آن صدق می‌کند.

[1] $\dot{x}=dx/dt\,,\ \ddot{x}=d^2x/dt^2\,,\ \dddot{x}=d^3x/dt^3$

مثال ۱,۱,٤

نرخ تبدیل صد گرم نیشکر محلول در آب به گلوکز با مقدار تبدیل نشده آن متناسب است. معادله دیفرانسیلی را پیدا کنید که نرخ تبدیل را بعد از t دقیقه بیان کند.

اگر y را مقدار گرم‌هایی از نیشکر در نظر بگیرید که در t دقیقه تبدیل‌شده‌اند، آنگاه $۱۰۰-\mathrm{y}$، مقدار گرم تبدیل نشده خواهد بود. در این صورت نرخ تبدیل به‌صورت $\mathrm{y}'=\mathrm{k}(۱۰۰-\mathrm{y})$ در می‌آید که در آن k مقدار ثابت تناسب است.

مرتبه یک معادله دیفرانسیل معمولی

یکی از روش‌های دسته‌بندی معادلات دیفرانسیل با استفاده از مرتبه آن‌هاست. مرتبه بالاترین مشتق در یک معادله دیفرانسیل را مرتبه معادله دیفرانسیل گوییم .

تعریف ۱,۱,۲

یک معادله دیفرانسیل معمولی از **مرتبه** n است، یا یک معادله مرتبه n–اُم است، اگر بزرگ‌ترین مشتق تابع مجهول در معادله، مشتق n–اُم آن باشد. توان بزرگ‌ترین مرتبه مشتق موجود در معادله را **درجه معادله دیفرانسیل** گویند.

معادلات:

$$\frac{dy}{dx}+۲xy=e^{-x^۲}$$
$$\frac{dx}{dt}=\frac{۳t^۲+٤t+۲}{۲(x-۱)}$$
$$(w')^۲+۲t^۳w'-٤t^۲w=۰$$

همگی معادلات دیفرانسیل مرتبه اول می‌باشند زیرا بزرگ‌ترین مشتق در هر یک از آن‌ها مشتق اول است. دو معادله اول درجه ۱ و معادله سوم درجه‌دو می‌باشند. معادلات:

$$x''(t)-٥x'(t)+٦x(t)=۰$$
$$\ddot{x}+۳t\dot{x}+۲x=\sin(\omega t)$$

معادلات مرتبه دوم درجه اول هستند و $e^yy^{(٥)}+(\sin x)y'''=۳e^x$ یک معادله مرتبه پنج است.

فرم کلی یک معادله دیفرانسیل معمولی

اگر y تابع مجهول با یک متغیر مستقل x باشد، و $y^{(k)}$ مشتق مرتبه k–اُم y باشد، می‌توان **صورت کلی معادله دیفرانسیل مرتبه n–اُم** را به‌صورت:

$$F\left(x,y,y',y'',y''',\dots,y^{(n-۱)},y^{(n)}\right)=۰$$

و گاهی به‌صورت:

$$y^{(n)}=G\left(x,y,y',y'',y''',\dots,y^{(n-۱)}\right)$$

نشان داد. مثال بعدی نشان می‌دهد که این روابط در عمل به چه صورت می‌باشند.

مثال ۵,۱,۱

فرم کلی یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم

اگر y تابع مجهولی از x باشد، آنگاه معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم $2\frac{d^2y}{dx^2}+e^x\frac{dy}{dx}=y+\sin x$ را می‌توان به‌صورت $2\frac{d^2y}{dx^2}+e^x\frac{dy}{dx}-y-\sin x=0$ یا به‌صورت:

$$\underbrace{2y''+e^xy'-y-\sin x}_{F(x,y,y',y'')}=0$$

نوشت.

توجه داشته باشید که F یک عبارت ریاضی شامل متغیر مستقل x تابع مجهول y و مشتقات مرتبه اول و دوم y است. در مثال اخیر به‌طور معادل می‌توان با استفاده از جبر معمولی برای بزرگ‌ترین مشتق معادله دیفرانسیل، معادله را به‌صورت $y''=\underbrace{\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}e^xy'}_{G(x,y,y')}$ نوشت.

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی PDE (Partial Differential Equations) به دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل گفته می‌شوند که در آن‌ها توابع مجهول برحسب چند متغیر مستقل به همراه مشتق جزیی توابع نسبت به آن متغیرها شرکت داشته باشند. به این دسته از معادلات دیفرانسیل، «**معادلات دیفرانسیل پاره‌ای**»، «**معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی**» یا «**معادلات دیفرانسیل جزیی**» گفته می‌شود.

به‌عنوان‌مثال معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=0$ که **معادله موج** نام دارد، در بسیاری از زمینه‌های فیزیک و مهندسی اهمیت ویژه‌ای دارد. در این معادله فرض می‌کنیم $u=u(x,t)$ تابعی با دو متغیر x و t باشد. در ادامه کتاب هر جا که از لفظ معادلات دیفرانسیل استفاده کردیم، مقصود ما معادلات دیفرانسیل معمولی می‌باشد. گاهی نیز که از متن مشخص است که منظور معادلات دیفرانسیل معمولی است، از لفظ معادلات استفاده می‌کنیم.

معادلات دیفرانسیل معمولی خطی و غیرخطی

یک راه دیگر برای دسته‌بندی معادلات دیفرانسیل، دسته‌بندی آن‌ها برحسب خطی یا غیرخطی بودن است.

تعریف ۳,۱,۱

اگر y تابعی برحسب x باشد، فرم کلی یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n به‌صورت زیر است:

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=f(x)\qquad(1.1.1)$$

نکته مهم در این تعریف این است که هر ضریب تابع a_i، همانند f، تنها وابسته به متغیر مستقل x است و به متغیر وابسته y یا هیچ‌یک از مشتقات آن بستگی ندارد. به‌طور خاص معادله (۱,۱,۱) شامل هیچ ضریب یا کمیتی از y و یا مشتقات آن نیست.

مثال ۶,۱,۱

معادله خطی مرتبه دوم

معادله $x'' + ۳tx' + ۲x = \sin(\omega t)$ که در آن ω یک مقدار ثابت عددی است، خطی است. اجزای این معادله به‌صورت زیر است:

$$\overbrace{۱}^{a_۲(t)} .x'' + \overbrace{۳t}^{a_۱(t)} .x' + \overbrace{۲}^{a_۰(t)} .x = \overbrace{sin\,(\omega t)}^{f(t)} .$$

ضرایب مشتقات مختلف تابع مجهول x توابعی (گاهی ضرایبی) تنها از متغیر مستقل t می‌باشند.

مثال بعدی نشان می‌دهد که تمام معادلات مرتبه اول، خطی نیستند.

مثال ۷,۱,۱

یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول غیرخطی (یک مدل عفونت HIV)

معادله $\frac{dT}{dt} = s + rT\left(۱ - \frac{T}{T_{max}}\right) - \mu T$ مدل رشد و مرگ T سلول، یکی از بخش‌های اصلی دستگاه ایمنی بدن است[۱]. اینجا $T(t)$ تعداد سلول‌های T موجود در زمان t است. اگر معادله را با حذف پرانتزها بازنویسی کنیم به دست می‌آوریم $\frac{dT}{dt} = s + rT - \left(\frac{r}{T_{max}}\right)T^۲ - \mu T$، و ملاحظه می‌کنیم که عبارتی شامل مربع تابع مجهول به دست می‌آید. بنابراین معادله خطی نیست.

۱–۱–۲. دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل معمولی

پیش‌تر با دستگاه‌های معادلات جبری مانند:

$$۳x - ٤y = -۲$$

$$-٥x + ۲y = ۷.$$

آشنا شده‌ایم. به همین ترتیب در کار با معادلات دیفرانسیل نیز ممکن است با دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل، مانند:

$$\frac{dx}{dt} = -۳x + y$$
$$\frac{dy}{dt} = x - ۳y$$

یا

$$\dot{x} = -sx + sy$$
$$\dot{y} = -xz + rx - y$$
$$\dot{z} = xy - bz$$

مواجه شویم که b، r و s مقادیر ثابت می‌باشند. دستگاه اخیر در مطالعات هواشناسی کاربرد زیادی دارد.

[۱] E. K. Yeargers, R. W. Shonkwiler, and J. V. Herod, An Introduction to the Mathematics of Biology With Computer Algebra Models (Boston: Birkhauser, ۱۹۹۶): ۳٤۱

توجه کنید که هر یک از این دستگاه‌ها دارای تعداد معادلات مختلف می‌باشند و معادلات دستگاه اول خطی می‌باشند درحالی‌که دو معادله آخر دستگاه دوم غیرخطی می‌باشند زیرا شامل عبارت حاصل‌ضربی از توابع مجهول (در معادله اول xz و در معادله دوم xy) می‌باشند. دستگاهی که تمام معادلات آن خطی باشند یک **دستگاه خطی** و دستگاهی که حداقل یکی از معادلات آن غیرخطی باشد، یک **دستگاه غیرخطی** نام دارد.

۱-۲. جواب‌های معادلات دیفرانسیل

۱-۲-۱. نکات و مفاهیم پایه‌ای

پیش‌ازاین هنگامی‌که با معادله‌ای مواجه می‌شدید، تلاش می‌کردید آن را حل کنید و جوابی برای آن بیابید. جواب یک معادله دیفرانسیل درواقع تابعی است که در آن معادله صدق می‌کند. یعنی هنگامی‌که این تابع را در معادله دیفرانسیل جایگذاری می‌کنید، یک عبارت ریاضی صحیح به دست آید.

تعریف ۱,۲,۱

جواب **معادله دیفرانسیل مرتبه n-اُم** $F(x,y,y',y'',y''',\dots,y^{(n-1)},y^{(n)})=0$ یا $y^{(n)}=G(x,y,y',y'',y''',\dots,y^{(n-1)})$ در بازه (a,b)، یک تابع حقیقی مقدار $y=y(x)$ است به‌طوری‌که تمام مشتقات موردنظر $y(x)$ در این بازه موجود باشند و $y(x)$ به ازای هر مقدار x در بازه، در معادله صدق کند.

حل کردن یک معادله دیفرانسیل به معنی یافتن تمام جواب‌های ممکن یک معادله است.

حتی پیش از آغاز بحث روش‌های تعیین جواب‌ها در فصل ۲، می‌توان جواب‌های برخی از معادلات دیفرانسیل ساده را حدس زد. مثال بعدی این موضوع را نشان می‌دهد.

مثال ۱,۲,۱

حدس زدن و بررسی جواب یک معادله دیفرانسیل

معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی $\frac{dB}{dt}=kB$، که k یک ثابت عددی مثبت است، نمونه ساده‌ای از موجودی یک حساب، $B(t)$، در طی t سال پس از افتتاح حساب است. میزان تغییر B در هرلحظه متناسب است با اندازه B در آن لحظه، که k ثابت تناسب است. این معادله بیان‌گر این حقیقت است که حساب بانکی بزرگ‌تر در هر زمان t، سریع‌تر رشد می‌کند.

اگر توابع مقدماتی را که می‌شناسید و مشتقات آن‌ها را بررسی کنید، می‌توانید نوع تابع $B(t)$ را حدس بزنید. کدام نوع از توابع هستند که مشتق آن‌ها ضریبی از خود آن توابع‌اند؟ می‌توان بررسی کرد که چرا تابع $B(t)$ باید یک تابع‌نمایی به‌صورت ae^{kt} باشد، که a یک عدد ثابت است. با جایگذاری $B(t)=ae^{kt}$ در معادله دیفرانسیل اصلی، می‌توانید صحت حدس خود را بررسی کنید. سمت چپ معادله به‌صورت $\frac{d(ae^{kt})}{dt}$ است، که برابر است با kae^{kt}، و سمت راست معادله به‌صورت $k(ae^{kt})$ است. به ازای هر مقادیر t، سمت چپ با سمت راست برابر است.

در ادامه ملاحظه خواهیم کرد که اگر قرار دهیم $t = ۰$، نتیجه می‌شود که $B(۰) = ae^{k(۰)} = a$، یعنی ثابت عددی a باید برابر با سپرده اولیه باشد. سرانجام جواب معادله به‌صورت $B(t) = B(۰)e^{kt}$ خواهد بود.

توجه داشته باشید که یک معادله دیفرانسیل درصورتی‌که جواب داشته باشد، معمولاً بیش از یک جواب دارد. همچنین به بازه‌ای که جواب در آن بازه تعریف می‌شود نیز توجه کنید. در ادامه این بخش و در فصل دوم جزییات بیشتری در رابطه باوجود و یکتایی جواب بیان خواهیم کرد. اکنون تنها این موضوع را بررسی می‌کنیم که چه وقت یک تابع جواب یک معادله دیفرانسیل است. به مثال بعدی توجه کنید.

مثال ۲,۲,۱

بررسی جواب یک معادله مرتبه دوم

فرض کنید ادعاشده است که $x(t) = ۵e^{۳t} - ۷e^{۲t}$ جواب معادله خطی مرتبه دوم $x'' - ۵x' + ۶x = ۰$ به ازای تمام اعداد حقیقی، یعنی برای تمام مقادیر t در بازه $(-\infty, \infty)$ است. می‌توانیم با محاسبه $x'(t) = ۱۵e^{۳t} - ۱۴e^{۲t}$ و $x''(t) = ۴۵e^{۳t} - ۲۸e^{۲t}$ و سپس جایگذاری این عبارت‌ها در معادلات اصلی، درستی این ادعا را نشان دهیم:

$$\begin{aligned} x'' - ۵x' + ۶x &= \overbrace{(۴۵e^{۳t} - ۲۸e^{۲t})}^{x''(t)} - ۵\,\overbrace{(۱۵e^{۳t} - ۱۴e^{۲t})}^{x'(t)} + ۶\,\overbrace{(۵e^{۳t} - ۷e^{۲t})}^{x(t)} \\ &= ۴۵e^{۳t} - ۲۸e^{۲t} - ۷۵e^{۳t} + ۷۰e^{۲t} + ۳۰e^{۳t} - ۴۲e^{۲t} \\ &= -۳۰e^{۳t} + ۴۲e^{۲t} + ۳۰e^{۳t} - ۴۲e^{۲t} = ۰\,. \end{aligned}$$

چون $x(t) = ۵e^{۳t} - ۷e^{۲t}$ در معادله اصلی صدق می‌کند، مشاهده می‌کنیم که $x(t)$ یک جواب معادله است. اما این تنها جواب معادله دیفرانسیل داده‌شده نیست. به‌عنوان‌مثال می‌توانید بررسی کنید که $x_۲(t) = -\pi e^{۳t} + \frac{۲}{۳}e^{۲t}$ نیز یک جواب معادله دیفرانسیل داده‌شده است

مثال ۳,۲,۱

بررسی یک پاسخ ضمنی

می‌خواهیم نشان دهیم که هر تابع y که در رابطه $G(x,y) = x^۲ + y^۲ - ۵ = ۰$ صدق کند، یک جواب معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ است.

ابتدا از رابطه به‌طور ضمنی مشتق می‌گیریم، $y(x)$ را به‌صورت y نشان می‌دهیم، یک تابع که به‌طور ضمنی برحسب متغیر مستقل x تعریف‌شده است را به دست می‌آوریم:

$$(۱)\quad \frac{d}{dx}G(x,y) = \frac{d}{dx}(x^۲ + y^۲ - ۵) = \frac{d}{dx}(۰) = ۰$$

$$(۲)\quad ۲x + \overbrace{۲y\frac{dy}{dx}}^{\text{قاعده زنجیری}} - \frac{d}{dx}(۵) = ۰$$

$$(۳)\quad ۲x+۲y\frac{dy}{dx}=۰\,.$$

اکنون معادله (۳) را برای $\frac{dy}{dx}$ حل می‌کنیم، به دست می‌آوریم $\frac{dy}{dx}=\frac{-۲x}{۲y}=-\frac{x}{y}$ و نشان می‌دهیم که هر تابعی که به‌طور ضمنی با استفاده از رابطه بالا تعریف شود، یک جواب معادله دیفرانسیل ماست.

۱–۲–۲. خانواده جواب‌ها

حال می‌خواهیم بررسی کنیم که یک معادله دیفرانسیل چه تعداد جواب می‌تواند داشته باشد. به‌عنوان‌مثال معادله $(y')^۲+۱=۰$ جواب حقیقی ندارد، درحالی‌که معادله $|y'|+|y|=۰$ دقیقاً دارای یک جواب $y\equiv ۰$ است (چرا؟).

ممکن است با حالت‌های پیچیده‌تری نیز مواجه شویم، مانند آنچه که در مثال بعدی نشان خواهیم داد.

مثال ٤,٢,١

خانواده نامتناهی جواب‌ها

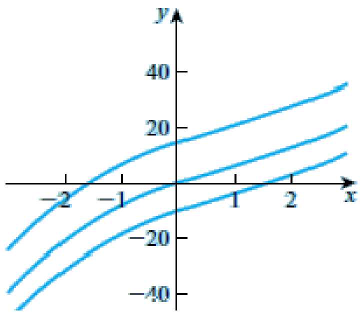
دو دانشجو معادله دیفرانسیل مرتبه اول ساده $\frac{dy}{dx}=f(x)=x^۲-۲x+۷$ را در اختیار دارند. جواب این معادله تابعی از x است که مشتق اول آن برابر با $x^۲-۲x+۷$ است. یکی از دو دانشجو فکر می‌کند که $\frac{x^۳}{۳}-x^۲+۷x$ جواب معادله است، درحالی‌که دیگری فکر می‌کند جواب $\frac{x^۳}{۳}-x^۲+۷x-۱۰$ است. به نظر می‌رسد که جواب هر دو نفر درست است.

جواب این مسأله به‌راحتی و با انتگرال‌گیری از دو طرف معادله دیفرانسیل به دست می‌آید:

$$y=\int dy=\int\frac{dy}{dx}dx=\int x^۲-۲x+۷\,dx\,.$$

چون از انتگرال‌گیری نامعین استفاده کرده‌ایم، همیشه یک ثابت انتگرال‌گیری وجود دارد که نباید آن را فراموش کرد. جواب مسأله ما درواقع یک خانواده نامتناهی از جواب‌هاست، $y(x)=\frac{x^۳}{۳}-x^۲+۷x+C$، که C یک ثابت حقیقی است. هر مقدار خاص C یک عضو خاص از خانواده جواب‌ها را به ما می‌دهد. زمانی که یک انتگرال نامعین را تشکیل دادیم (با یک ضد مشتق مواجه شدیم)، یک معادله دیفرانسیل ساده را حل کرده ایم.

هنگام توصیف مجموعه جواب‌های یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول مانند معادله مثال قبل، معمولاً آن را خانواده **جواب‌های یک پارامتری** می‌نامیم. منظور از پارامتر، ثابت C است. هر مقدار معین C جوابی را نتیجه می‌دهد که

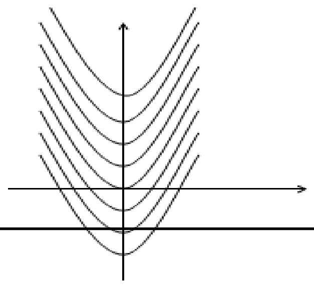


شکل $1-1$ منحنی معادله $\frac{dy}{dx} = x^2 - 2x + 7$ با پارامتر های ۱۵، ۰ و ۱۰−

جواب خصوصی معادله دیفرانسیل نام دارد. در مثال قبلی دو دانشجو جواب‌های خصوصی معادله را به دست آورده بودند، یکی با $C = 0$ و دیگری با $C = -10$. جواب خصوصی یک معادله را گاهی انتگرال معادله، و شکل آن را **منحنی انتگرال** یا **منحنی جواب** می‌نامند.

شکل ۱–۱ سه منحنی انتگرال معادله $\frac{dy}{dx} = x^2 - 2x + 7$ را نشان می‌دهد، که $C = 15, 0, -10$ (از بالا به پایین).

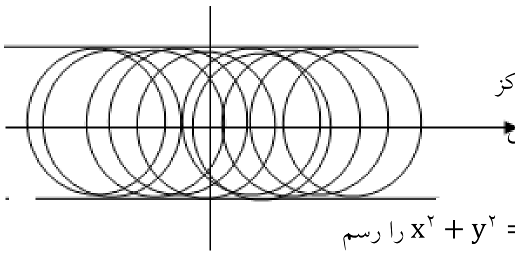
مثال ۵,۲,۱



دسته منحنی‌های $y = x^2 + c$ را رسم کنید. به ازای $c = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ نمودار آن‌ها به‌صورت مقابل است .

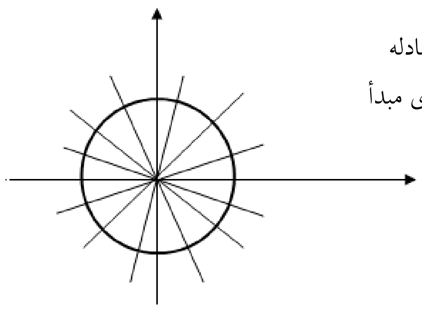
مثال ۶,۲,۱

دسته منحنی‌های $(x - c)^2 + y^2 = 1$ را رسم کنید.



به ازای c های مختلف نمودار دوایری هستند که مرکز آن‌ها روی محور xها قرار دارد و بر دو خط موازی $y = \pm 1$ مماس هستند.

مثال ۱–۲–۷) دسته منحنی‌های $y = mx$ و $x^2 + y^2 = R^2$ را رسم کنید.



خطوط $y = mx$ خطوطی هستند که از مبدأ می‌گذرند و معادله $x^2 + y^2 = R^2$ معادلات دوایری هستند که مرکز آن‌ها روی مبدأ مختصات است و شعاع آن‌ها تغییر می‌کند.

۱–۳. مسایل مقدار اولیه و مسایل مقدار مرزی

اکنون می‌خواهیم یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول را به ازای y،
یعنی تابعی از متغیر مستقل t، حل کنیم و یکی از منحنی‌های انتگرال
آن را که از نقطه خصوصی $(t_۰, y_۰)$ عبور می‌کند، روی شکل مشخص کنیم. قرار می‌دهیم $y(t_۰) = y_۰$ و آن را یک **شرط اولیه** می‌نامیم، و در این صورت مسأله را یک **مسأله مقدار اولیه (IVP)** می‌نامیم. توجه کنید که به‌این‌ترتیب می‌خواهیم یک جواب خصوصی را به دست آوریم. این جواب را با اختصاص یک مقدار مشخص به ثابت انتگرال‌گیری (پارامتر) به دست می‌آوریم.

سپس بررسی می‌کنیم که چگونه یک مسأله مقدار اولیه ساده را حل کنیم.

مثال ۱,۳,۱

مسأله مقدار اولیه مرتبه اول

فرض کنید ذره‌ای در راستای محور x–ها حرکت کند به‌طوری‌که سرعت لحظه‌ای در لحظه t با استفاده از $v(t) = ۱۲ - t^۲$ نشان داده شود. ابتدا مکان x ذره را نسبت به مبدأ در هر زمان $t > ۰$ تعیین می‌کنیم.

چون تابع سرعت مشتق تابع مکان است، مسأله را با استفاده از معادله دیفرانسیل مرتبه اول $\frac{dx}{dt} = ۱۲ - t^۲$ توصیف می‌کنیم. با انتگرال‌گیری از دو طرف معادله نتیجه می‌شود:

$$x(t) = \int dx = \int \frac{dx}{dt} dt = \int ۱۲ - t^۲\, dt = ۱۲t - \frac{t^۳}{۳} + C$$

لذا نتیجه می‌گیریم مکان ذره در هر زمان دلخواه $t > ۰$ را می‌توان با هر عضو خانواده یک پارامتری $۱۲t - \frac{t^۳}{۳} + C$ به دست آورد، که یک نتیجه چندان رضایت‌بخش نیست. اما اگر اطلاعات دیگری در اختیار داشته باشیم، می‌توانیم مقدار معینی برای C به دست آوریم و از ابهام موجود رهایی یابیم.

به‌عنوان‌مثال فرض کنید می‌دانیم که ذره در زمان $t = ۱$ در مکان $x = -۵$ قرار دارد. لذا با استفاده از این شرایط اولیه به دست می‌آوریم:

$$-۵ = x(۱) = ۱۲(۱) - \frac{۱^۳}{۳} + C\,, \quad \text{یا} \quad -۵ = \frac{۳۵}{۳} + C\,.$$

معادله اخیر نشان می‌دهد که $C = \frac{-۵۰}{۳}$، بنابراین مکان ذره در زمان t با استفاده از تابع خصوصی $x(t) = ۱۲t - \frac{t^۳}{۳} - \frac{۵۰}{۳} = ۱۲t - \frac{(t^۳+۵۰)}{۳}$ تعیین می‌شود.

شرط اولیه $x(۱) = -۵$ را به‌صورت تصادفی انتخاب کردیم. هر انتخاب دیگر $x(t_۰) = x_۰$ منجر به یک مقدار معین برای C و لذا یک جواب خصوصی برای مسأله می‌شود.

۱–۳–۱. منحنی انتگرال جواب یک مسأله مقدار اولیه

اگر بتوان یک معادله مرتبه اول را به‌صورت $y' = f(x)$ نوشت، یعنی اگر سمت راست تابعی پیوسته (یا قطعه‌قطعه پیوسته) از تنها متغیر مستقل باشد، آنگاه همیشه می‌توانیم جواب مسأله مقدار اولیه $y' = f(x)$، $y(x_۰) = y_۰$ را روی بازه (a,b) به‌صورت:

$$y(x) = \int_{x_۰}^{x} f(t)\,dt + y_۰ \qquad (۱.۳.۱)$$

برای x در بازه بیان کنیم. توجه کنید که از مقدار x شرط اولیه به‌عنوان حد پایین انتگرال، و مقدار y شرط اولیه به‌عنوان ثابت انتگرال‌گیری استفاده کرده‌ایم. از t به‌عنوان متغیر مصنوعی استفاده کرده‌ایم. برای معادله داده‌شده (۱٫۳٫۱) قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال (FTC) نشان می‌دهد که $y' = f(x)$، و می‌بینیم که $y(x_۰) = \int_{x_۰}^{x_۰} f(t)\,dt + y_۰ = ۰ + y_۰ = y_۰$ که همان چیزی است که ما می‌خواستیم. این روش برای بررسی انواع معینی از مسایل مقدار اولیه در فیزیک و متون مهندسی به کار می‌رود. در مثال ۱–۲–٤ جواب معادله به‌عنوان‌مثال با $y(-۱) = ۲$، عبارت است از:

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_{-۱}^{x} t^۲ - ۲t + ۷\,dt + ۲ \\ &= \left(\frac{t^۳}{۳} - t^۲ + ۷t\right)\Big|_{t=x} - \left(\frac{t^۳}{۳} - t^۲ + ۷t\right)\Big|_{t=-۱} + ۲ \\ &= \left(\frac{x^۳}{۳} - x^۲ + ۷x\right) - \left(\frac{-۲۵}{۳}\right) + ۲ = \frac{x^۳}{۳} - x^۲ + ۷x + \frac{۳۱}{۳}. \end{aligned}$$

این مسأله را با استفاده از روشی که در مثال ۱–۳–۱ دیدیم، یعنی بدون استفاده از انتگرال‌گیری معین، نیز حل کنید.

۱–۳–۲. خانواده جواب‌ها (II)

اگرچه با نمونه‌هایی از معادلات مرتبه اول آشنا شدیم که جواب نداشتند یا تنها یک جواب داشتند، اما در حالت کلی انتظار داریم که معادلات دیفرانسیل مرتبه اول دارای مجموعه نامتناهی از جواب‌ها باشند که دارای یک پارامتر می‌باشند.

در ادامه بحث بخش ۱–۲ توضیح می‌دهیم که یک معادله دیفرانسیل مرتبه n–اُم دارای یک خانواده n–پارامتری از جواب‌ها، شامل n ثابت دلخواه (پارامتر) $C_۱, C_۲, \dots, C_n$ است. به‌عنوان‌مثال جواب معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $y'' = g(t, y, y')$ دارای دو ثابت عددی دلخواه است. با استفاده از شرایط اولیه $y(t_۰) = y_۰$ و $y'(t_۰) = y_۱$، می‌توانیم مقادیر مشخصی برای این دو پارامتر تعیین کنیم و یک جواب خصوصی به دست آوریم.

مثال بعدی نشان می‌دهد که چگونه جواب یک مسأله مقدار اولیه مرتبه دوم را به دست آوریم.

مثال ۲،۳،۱

یک مسأله مقدار اولیه مرتبه دوم

در بخش ۴-۱ خواهیم دید که هر جواب معادله خطی مرتبه دوم $y''+y=\cdot$ به‌صورت $y(t)=A\cos t+B\sin t$ است که A و B ثابت‌های دلخواه می‌باشند. (تحقیق کنید که هر تابعی به‌صورت بیان‌شده، جواب معادله دیفرانسیل است.) اگر جواب این معادله مکان حرکت ذره‌ای نسبت به نقطه ثابتی را نشان دهد، آنگاه مشتق جواب، سرعت ذره را در زمان t نشان می‌دهد. به‌عنوان‌مثال با انتخاب شرایط اولیه $y(\cdot)=۱$ و $y'(\cdot)=\cdot$، بیان می‌کنیم که مکان ذره در زمان شروع مطالعه به‌اندازه ۱ واحد در جهت مثبت نسبت به نقطه ثابت موردنظر است و سرعت ذره در زمان شروع مطالعه ۰ است. به‌بیان‌دیگر ذره از مکان ۱ واحد در جهت مثبت نقطه ثابت شروع به حرکت می‌کند.

می‌توانیم از این شرایط اولیه برای تعیین جواب خصوصی معادله دیفرانسیل اصلی استفاده کنیم:

۱. $y(\cdot)=۱$ نشان می‌دهد که $۱=y(\cdot)=A\cos(\cdot)+B\sin(\cdot)=A$.

۲. $y'(\cdot)=\cdot$ نشان می‌دهد که $\cdot=y'(\cdot)=-A\sin(\cdot)+B\cos(\cdot)=B$.

از ترکیب نتایج (۱) و (۲) جواب خصوصی $y(t)=\cos t$ به دست می‌آید.

تعریف ۱،۳،۱

تعیین جواب خصوصی معادله درجه n:

$$F\left(t,y,y',y'',y''',\dots,y^{(n-۱)},y^{(n)}\right)=\cdot$$

به‌طوری‌که $y(t_\cdot)=y_\cdot$، $y'(t_\cdot)=y_۱$، $y''(t_\cdot)=y_۲$، و به همین ترتیب تا $y^{(n-۱)}(t_\cdot)=y_{n-۱}$، که $y_\cdot,y_۱,\dots,y_{n-۱}$ ثابت‌های حقیقی دلخواه می‌باشند را **حل کردن یک مسأله مقدار اولیه (IVP)** می‌نامند. n مقدار مشخص $y(t_\cdot)=y_\cdot$، $y'(t_\cdot)=y_۱$، $y''(t_\cdot)=y_۲$، و... و $y^{(n-۱)}(t_\cdot)=y_{n-۱}$ را **شرایط اولیه** می‌نامند.

تاکنون از شرایطی که تحت آن بتوان یک مسأله مقدار اولیه را حل کرد، اطمینان نداشتیم. در فصل دوم درباره وجود و یکتایی جواب‌های معادلات صحبت می‌کنیم. سپس در فصول بعدی مسایل مقدار اولیه را برای دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل موردبررسی قرار می‌دهیم.

مسایل مقدار مرزی

برای معادلات دیفرانسیل از مرتبه دوم یا بیشتر، با تعیین آنچه **شرایط مرزی** نامیده می‌شود، می‌توان یک جواب خصوصی تعیین کرد. در این حالت ایده اصلی ارائه شرایطی است که باید برای تابع جواب و مشتقات آن در دو نقطه متمایز از دامنه برقرار باشد.

تعریف ۲،۳،۱

یک **مسأله** مقدار **مرزی** مسأله تعیین جواب یک معادله دیفرانسیل است به‌طوری‌که شرایط روی تابع مجهول در دو مقدار یا بیشتر از متغیر مستقل مشخص باشد. چنین شرایطی را **شرایط مرزی** می‌نامند.

نقاط انتخاب‌شده به ماهیت و داده‌های مسأله بستگی دارد. به‌عنوان‌مثال اگر فشار وارد بر یک تیرآهن به طول L که دو سر آن درون سیمان قرار داده‌شده است را بررسی کنیم، اگر نیرو در سراسر تیر پخش‌شده باشد باید خمیدگی در فاصله x ازیک‌طرف تیر، $y(x)$، را به دست آوریم (شکل ۱–۲). توجه کنید که دامنه y، $[۰, L]$ است. در این مسأله طبیعی است که مقادیر منطقی $y(۰) = ۰$ و $y(L) = ۰$ را در نقاط انتهایی بازه جواب قرار دهیم. به‌طور هندسی نیاز به جواب y در طول نقاط $(۰,۰)$ و $(L, ۰)$ داریم. (مسأله C ۲ در تمرینات ۱–۳ را به‌عنوان یک مسأله کاربردی از این نوع ملاحظه کنید.)

مثال بعدی تنها به‌عنوان یک حالت از مسأله مقدار اولیه نشان می‌دهد که بدون تحلیل بیشتر نمی‌توان مطمئن بود که آیا جواب‌های خصوصی برای مسأله مقدار مرزی وجود دارد و آیا جوابی که به دست آورده‌ایم یکتاست. به‌طورکلی حل کردن مسایل مقدار مرزی مشکل‌تر از مسایل مقدار اولیه است. اگرچه در این کتاب گاهی به مسایل مقدار مرزی می‌پردازیم، اما توجه خود را بیشتر معطوف مسایل مقدار اولیه خواهیم نمود.

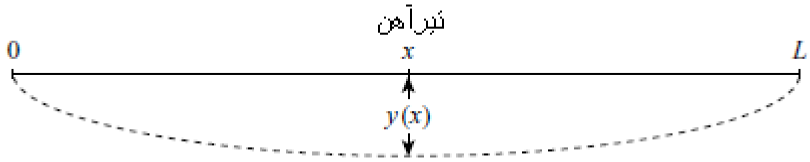
به‌طوری‌که در مثال بعدی نیز خواهیم دید، برخی از مسایل مقدار مرزی جواب ندارند، برخی تنها یک جواب دارند و برخی از آن‌ها نیز تعداد زیادی (بی‌نهایت) جواب دارند.

مثال ۳،۳،۱

مسأله مقدار مرزی می‌تواند تعداد زیادی جواب داشته باشد، تنها یک جواب داشته باشد یا اصلاً جواب نداشته باشد.

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم مثال ۱–۳–۲، $y'' + y = ۰$، را در نظر بگیرید که دارای خانواده جواب‌های دو پارامتری $y(t) = c_۱ \cos t + c_۲ \sin t$ است.

حال فرض کنید شرایط مرزی $y(۰) = ۱$ و $y(\pi) = ۱$ را به مسأله تحمیل کنیم. شرط اول نشان می‌دهد که $۱ = y(۰) = c_۱ \cos(۰) + c_۲ \sin(۰) = c_۱$، و شرط دوم بیان می‌کند که $۱ = y(\pi) = c_۱ \cos(\pi) + c_۲ \sin(\pi) = -c_۱$. چون $c_۱$ نمی‌تواند هم‌زمان دارای مقادیر ۱ و ۱- باشد، این تناقض نشان می‌دهد که مسأله مقدار مرزی ما جواب ندارد.



شکل **1 − 2** جواب $y(x)$ که در شرایط مرزی $y(۰) = ۰$ و $y(L) = ۰$ صدق می کند .

از سوی دیگر شرایط مرزی $y(۰) = ۱$ و $y(۲\pi) = ۱$ نتایج متفاوتی به دنبال دارد. با استفاده از شرط اول داریم $۱ = y(۰) = c_۱ \cos(۰) + c_۲ \sin(۰) = c_۱$. شرط دوم نیز نتیجه می‌دهد $۱ = y(۲\pi) = c_۱ \cos(۲\pi) + c_۲ \sin(۲\pi) = c_۱$. چون هیچ شرطی برای $c_۲$ به دست نیامده است، پس هر مقداری

می‌توانیم به آن اختصاص دهیم. به‌بیان‌دیگر مسأله مقدار مرزی ما دارای بی‌نهایت جواب به‌صورت $y(t) = \cos(t) + c_۲ \sin(t)$ است.

سرانجام اگر قرار دهیم $y(۰) = ۱$ و $y(\pi/٤) = ۱$، به دست می‌آید $۱ = y(۰) = c_۱ \cos(۰) + c_۲ \sin(۰) = c_۱$ و

$$۱ = y\left(\frac{\pi}{٤}\right) = c_۱ \cos\left(\frac{\pi}{٤}\right) + c_۲ \sin\left(\frac{\pi}{٤}\right) = c_۱\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) + c_۲\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{۲}}{۲} + c_۲\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)$$

که از آن نتیجه می‌شود $c_۲ = \sqrt{۲} - ۱$. بنابراین این مسأله مقدار مرزی دارای جواب یکتای $y(t) = \cos t + \left(\sqrt{۲} - ۱\right) \sin t$ است.

توجه داشته باشید که برای یک معادله مرتبه n-اُم کلی (یا برای یک دستگاه معادلات)، راه‌های زیادی برای تعیین شرایط مرزی وجود دارد که همیشه در نقاط انتهایی بازه جواب نیست. هدف داشتن شرایطی است که ما را قادر می‌سازد به ازای عدد مناسبی از میان اعداد دلخواه، مسأله را حل کنیم.

مثال زیر نشان می‌دهد که چگونه شرایط مرزی به‌طور طبیعی در جواب یک مسأله رخ می‌دهند.

مثال ٤,۳,۱

یک مسأله مقدار مرزی کاربردی

مجله اینترنتی ماشین و راننده[۱] (۲۳ ژانویه ۲۰۰۵) گزارش داد که فراری دو سرنشین F٤۳۰ سرعت ۰ تا ٦۰ مایل در ساعت را در ۳,٥ ثانیه طی می‌کند. با فرض ثابت بودن شتاب، می‌خواهیم بدانیم ماشین پیش از رسیدن به‌سرعت ٦۰ مایل در ساعت چه فاصله‌ای را طی کرده است.

اگر $s(t)$ نشان‌دهنده مکان ماشین پس از t ثانیه باشد، برای اندازه‌گیری کل مسافت طی شده در ۳,٥ ثانیه باید $s(۳.٥) - s(۰)$ را محاسبه کنیم. می‌دانیم که شتاب را می‌توان به‌صورت $a(t) = \frac{d^۲s}{dt^۲}$ بیان کرد، که در این مسأله برابر با ثابت C است؛ و می‌دانیم $s(۰) = s'(۰) = ۰$، یعنی مکان اولیه ما و نیز سرعت اولیه ما درست در لحظه‌ای که پدال گاز را فشار می‌دهیم، صفر است. اطلاعات دیگری که موردنیاز است، سرعت ما در لحظه ۳,٥ ثانیه است، $s'(۳.٥)$، که برابر با ٦۰ مایل در ساعت است. لذا معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $\frac{d^۲s}{dt^۲} = C$، شرایط اولیه و برخی شرایط مرزی را داریم و می‌خواهیم تابع مجهول $s(t)$ را به دست آوریم.

اکنون قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال بیان می‌کند که وقتی از دو طرف معادله دیفرانسیل ضد مشتق می‌گیریم، به دست می‌آوریم:

$$\int \frac{d^۲s}{dt^۲} dt = \int C\, dt = Ct + C_۱$$

[۱] Car and Driver

که $C_۱$ ثابت انتگرال‌گیری است. اما داریم $\int \frac{d^۲s}{dt^۲}dt = \frac{ds}{dt}$، پس $\frac{ds}{dt} = Ct + C_۱$. با انتگرال‌گیری از دو طرف معادله اخیر نتیجه می‌شود:

$$s(t) = \frac{Ct^۲}{۲} + C_۱t + C_۲$$

لذا عبارتی برای $s(t)$ به دست آورده‌ایم که شامل سه ثابت عددی است. حال با استفاده از شرط $s(۰) = ۰$ داریم:

$$۰ = s(۰) = \frac{C(۰)^۲}{۲} + C_۱(۰) + C_۲\,,$$

که از آن نتیجه می‌شود $C_۲ = ۰$، لذا داریم:

$$s(t) = \frac{Ct^۲}{۲} + C_۱t$$

چون $s'(۰) = ۰$ می‌توان ملاحظه کرد که $۰ = s'(۰) = (Ct + C_۱)|_{t=۰} = C_۱$، و لذا $s(t) = \frac{Ct^۲}{۲}$.

هنوز یک ثابت C در رابطه داریم، اما می‌دانیم در پایان ۳٫۵ ثانیه سرعت ما ٦۰ مایل در ساعت است. در اینجا باید به واحدهای مورداستفاده دقت کنیم که ساعت با ثانیه اشتباه نشود. برای اینکه تمام واحدها یکسان باشند، ۳٫۵ ثانیه را به ۷/۷۲۰۰ ساعت تبدیل می‌کنیم. لذا ادعا می‌کنیم $s'(۷/۷۲۰۰) = C.(۷/۷۲۰۰) = ٦۰$، پس داریم:

$$C = \frac{٦۰(۷۲۰۰)}{۷} = ٦۱۷۱٤.۳\ (miles/hr^۲)$$
$$s(t) = \frac{Ct^۲}{۲} = ۳۰۸٥۷.۲\ t^۲$$

و

$$s\left(\frac{۷}{۷۲۰۰}\right) = ۳۰۸٥۷.۲\left(\frac{۷}{۷۲۰۰}\right)^۲ = ۰.۰۲۹۱٦٦۷ \ldots mile \approx ٤۷\ m$$

لذا نشان دادیم که فراری F٤۳۰ مدل ۲۰۰٥ برای رسیدن از سرعت ۰ به ٦۰ مایل در ساعت، مسافت ٤۷ متر را طی می‌کند.

اگر تمام مقادیر تابع و مشتقات آن در یک نقطه خاص متغیر مستقل بیان‌شده باشند، آن‌ها را شرایط اولیه و در غیر این صورت آن‌ها را **شرایط مرزی** می‌نامند.

جواب‌های عمومی

اگر هر یک از جواب‌های معادله دیفرانسیل مرتبه n، $F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-۱)}, y^{(n)}\right) = ۰$، روی بازه (a, b) را بتوان از یک خانواده n پارامتری از جواب‌ها با تخصیص مقادیر مناسب به n پارامتر به دست آورد، این خانواده جواب‌ها را **جواب عمومی معادله دیفرانسیل** می‌نامند. در این حالت به n شرط اولیه یا n شرط مرزی برای تعیین پارامترها نیاز داریم.

اما گاهی همه جواب‌ها از خانواده جواب‌های n پارامتری به دست نمی‌آیند. به‌عنوان‌مثال می‌توان بررسی کرد که معادله دیفرانسیل غیرخطی مرتبه اول $۲xy' + y^۲ = ۱$ دارای یک خانواده یک پارامتری از جواب‌ها به‌صورت $y = \frac{Cx-۱}{Cx+۱}$ است. اما به ازای هر مقدار x تابع ثابت $y \equiv ۱$ نیز یک جواب معادله است که به ازای هیچ انتخابی از C، از خانواده جواب‌ها به دست نمی‌آید. فرض کنید یک C وجود داشته باشد که به ازای آن داشته باشیم $\frac{Cx-۱}{Cx+۱} = ۱$. لذا داریم $Cx - ۱ = Cx + ۱$ که نتیجه می‌دهد $-۱ = ۱$.

همچنین $y(x) = kx^۲$ جواب معادله دیفرانسیل $x^۲y'' - ۳xy' + ٤y = ۰$ به ازای هر ثابت k و هر مقدار x است، اما $y(x) = x^۲ \ln|x|$ نیز یک جواب معادله است (این ادعا را بررسی کنید). در حقیقت چون معادله مرتبه دوم است، یک خانواده یک پارامتری نمی‌تواند جواب عمومی معادله باشد.

جواب یک معادله دیفرانسیل مرتبه n که از تخصیص مقادیر خاص به پارامترهای خانواده جواب‌ها به دست نمی‌آید را یک **جواب غیرعادی معادله** می‌نامند. در فصل ۲ ملاحظه خواهیم کرد که برخی از این جواب‌های غیرعادی هنگامی‌که جابجایی‌های جبری خاصی روی معادلات دیفرانسیل انجام می‌شوند، به وجود می‌آیند. همچنین ثابت می‌شود که معادلات دیفرانسیل خطی جواب غیرعادی ندارند.

۱-۴. تمرینات فصل اول

در تمرینات ۱ تا ۱۲ **الف)** در هر معادله متغیر مستقل و متغیر وابسته را مشخص کنید، **ب)** مرتبه هر معادله دیفرانسیل را تعیین کنید، و **پ)** خطی یا غیرخطی بودن هر معادله را مشخص کنید. برای معادلات غیرخطی، دلیل غیرخطی بودن را نیز بیان کنید.

۱) $y' = y - x^۲$

۲) $xy' = ۲y$

۳) $x'' + ۵x = e^{-x}$

٤) $(y')^۲ + x = ۳y$

۵) $xy'(xy' + y) = ۲y^۲$

٦) $\frac{d^۲r}{dt^۲} = ۳\frac{dr}{dt} + \sin t$

۷) $y'' + xy''' + e^x = ۰$

۸) $y'' + ky'(y^۲ - ۱) + ۳y = -۲\cos t$

۹) $\dddot{x} - ۲\ddot{x} + ٤t\dot{x} - e^t x = t + ۱$

۱۰) $x^{(۷)} + t^۲x^{(۵)} = xe^t$

۱۱) $e^{y'} + ۳xy = ۰$

۱۲) $t^۲R''' - ٤tR'' + R' + ۳R = e^t$

۱۳) هرکدام از دستگاه‌های زیر را تحت خطی یا غیرخطی بودن دسته‌بندی کنید.

الف) $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = x - ٤xy \\ \frac{dx}{dt} = -۳x + y \end{cases}$

ب) $\begin{cases} Q' = tQ - ۳t^۲R \\ R' = ۳Q + ۵R \end{cases}$

پ) $\begin{aligned} \dot{x} &= x - xy + z \\ \dot{y} &= -2x + y - yz \\ \dot{z} &= 3x - y + z \end{aligned}$

ت) $\begin{aligned} \dot{x} &= 2x - ty + t^2 z \\ \dot{y} &= -2tx + y - z \\ \dot{z} &= 3x - t^3 y + z \end{aligned}$

۱۴) به ازای چه مقادیری از a، معادله دیفرانسیل:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (a^2 - a)x\frac{dx}{dt} = te^{(a-1)x}$$

یک معادله خطی است؟

۱۵) معادلات زیر را در صورت امکان، به‌صورت معادلات خطی بازنویسی کنید.

الف) $\dfrac{dx}{dt} = \ln(2^x)$

ب) $x' = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$

پ) $x' = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$

در تمرینات ۱۶ تا ۲۵ تحقیق کنید که آیا تابع بیان‌شده جواب معادله دیفرانسیل داده‌شده است. حروف a، b، c و d ثابت‌های عددی می‌باشند.

۱۶) $y'' + y = 0\ ;\quad y = \sin x$

۱۷) $x'' - 5x' + 6x = 0\ ;\quad x = -\pi e^{3t} + \frac{2}{3}e^{2t}$

۱۸) $\frac{1}{4}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x\frac{dy}{dx} + y = 0\ ;\quad y = x^2$

۱۹) $t\frac{dR}{dt} - R = t^2 \sin t\ ;\quad R = t(c - \cos t)$

۲۰) $\frac{d^4y}{dt^4} = 0\ ;\quad y = at^3 + bt^2 + ct + d$

۲۱) $\frac{dr}{dt} = at + br\ ;\quad r = ce^{bt} - \frac{a}{b}t - \frac{a}{b^2}$

۲۲) $xy' - 2 = 0\ ;\quad y = \ln(x^2)$

۲۳) $y'' = a\sqrt{1 + (y')^2}\ ;\quad y = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}$

۲۴) $xy' - \sin x = 0\ ;\quad y = \int_1^x \frac{\sin t}{T}\,dt$

(قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال در بخش الف-۴ را ملاحظه کنید.)

۲۵) $y'' + 2xy' = 0\ ;\quad y = \int_3^x e^{-t^2}\,dt$

(قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال در بخش الف-۴ را ملاحظه کنید.)

۲۶) برای هر یک از توابع زیر، معادله دیفرانسیلی بیابید که تابع در آن صدق کند:

الف) $y = c + \frac{x}{c}$, که c یک ثابت عددی است .

ب) $y = e^{ax}\sin bx$, که a و b ثابت‌های عددی هستند .

پ) $y = (A + Bt)e^{t}$, که A و B ثابت‌های عددی هستند .

ت) $y(t) = e^{-۳t} + \int_{۱}^{t} uy(u)\,du$

در هر یک از مسایل ۲۷ تا ۳۰ فرض کنید تابع y به‌طور ضمنی به‌صورت تابعی از x با معادله داده‌شده تعریف شود که C یک ثابت عددی است. در هر مورد برای تعیین مشتق معادله از مشتق‌گیری ضمنی استفاده کنید.

۲۷) $xy - \ln y = C$

۲۸) $y + \arctan y = x + \arctan x + C$

۲۹) $y^{۳} - ۳x + ۳y = ۵$

۳۰) $۱ + x^{۲}y + ٤y = ۰$

۳۱) آیا تابع y که در $x^{۲} + y^{۲} - ٦x + ۱۰y + ۳٤ = ۰$ صدق می‌کند یک جواب معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} = \frac{۳-x}{y+۵}$ است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

۳۲) تحقیق کنید که آیا $y = \frac{x^{۲}}{۲} + \frac{x}{۲}\sqrt{x^{۲}+۱} + ln\sqrt{x + \sqrt{x^{۲}+۱}}$ جواب معادله $۲y = xy' + \ln(y')$ است؟

۳۳) توضیح دهید که در مثال ۱-۲-۱، چرا $B(t)$ (جواب معادله دیفرانسیل $\frac{dB}{dt} = kB$) نمی‌تواند یک تابع چندجمله‌ای، مثلثاتی یا لگاریتمی باشد؟

۳٤) الف) چرا معادله $(y')^{۲} + ۱ = ۰$ جواب حقیقی ندارد؟

ب) چرا معادله $|y'| + |y| = ۰$ تنها یک جواب دارد؟ آن جواب را تعیین کنید.

۳۵) توضیح دهید که چرا معادله $\frac{dx}{dt} = \sqrt{-|x-t|}$ جواب حقیقی ندارد؟

۳٦) اگر c یک ثابت عددی مثبت باشد، نشان دهید دو تابع $y = \sqrt{c^{۲} - x^{۲}}$ و $y = -\sqrt{c^{۲} - x^{۲}}$ جواب‌های معادله غیرخطی $y\frac{dy}{dx} + x = ۰$ در بازه $-c < x < c$ می‌باشند. توضیح دهید که چرا جواب‌ها در خارج از بازه باز $(-c, c)$ صحیح نیستند.

۳۷) الف) تحقیق کنید که تابع $y = \ln(|C_{۱}x|) + C_{۲}$ جواب معادله دیفرانسیل $y' = \frac{۱}{x}$ برای هر مقدار پارامترهای $C_{۱}$ و $C_{۲}$ و هر مقدار x در بازه $(۰, \infty)$ است.

ب) نشان دهید که برای y تنها یک پارامتر صحیح موردنیاز است. به‌بیان‌دیگر $y = \ln(|C_{۱}x|) + C_{۲}$ را تنها با استفاده از یک پارامتر بنویسید.

۳۸) یک جواب برای $\frac{dy}{dx} + y = \sin x$ به‌صورت $y(x) = c_{۱}\sin x + c_{۲}\cos x$ به دست آورید که $c_{۱}$ و $c_{۲}$ ثابت‌های عددی هستند.

۳۹) یک چندجمله‌ای درجه دوم $y(x)$ بیابید که یک جواب (خصوصی) معادله دیفرانسیل خطی $۲y' - y = ۳x^{۲} - ۱۳x + ۷$ باشد.

٤٠) نشان دهید معادله غیرخطی مرتبه اول $(xy'-y)^{۲}-(y')^{۲}-۱=۰$ دارای خانواده یک پارامتری از جواب‌ها به‌صورت $y=Cx\pm\sqrt{C^{۲}+۱}$ است، اما هر تابع y که به‌طور ضمنی با استفاده از رابطه $x^{۲}+y^{۲}=۱$ تعریف شود نیز یک جواب این معادله است.

٤١) معادله دیفرانسیلی بیابید که در تابع

$$y(t)=\cos t+\int_{۰}^{t}(t-u)\,y(u)du$$

صدق کند.

٤٢) معادله $xy''-(x+n)y'+ny=۰$ را در نظر بگیرید که n یک عدد صحیح نامنفی است.

الف) نشان دهید $y=e^{x}$ جواب معادله است.

ب) نشان دهید $y=۱+x+\frac{x^{۲}}{۲!}+\frac{x^{۳}}{۳!}+\cdots+\frac{x^{n}}{n!}$ جواب معادله است.

٤٣. معادله و جواب تمرین ١٩ را در نظر بگیرید. یک جواب خصوصی را تعیین کنید که در شرط اولیه $R(\pi)=۰$ صدق کند.

٤٤. معادله و جواب تمرین ٢٠ را در نظر بگیرید. یک جواب خصوصی را تعیین کنید که در شرایط اولیه $y(۰)=۱$، $y'(۰)=۰$، $y''(۰)=۱$ و $y'''(۰)=٦$ صدق کند. [راهنمایی: هر بار از یکی از شرایط اولیه، به ترتیب از سمت راست، استفاده کنید.]

٤٥. معادله و جواب تمرین ٢١ را در نظر بگیرید. یک جواب خصوصی را تعیین کنید که در شرط اولیه $r(۰)=۰$ صدق کند. (جواب تنها دارای ثابت‌های a و b است.)

٤٦. معادله و جواب تمرین ٢٣ را در نظر بگیرید. یک جواب خصوصی را تعیین کنید که در شرایط اولیه $y(۰)=۲$ و $y'(۰)=۰$ صدق کند.

٤٧. ثابت‌های A، B و C را طوری تعیین کنید که $\frac{۱}{۸}-\frac{۱}{٤}x+\frac{۱۱}{۲۹٦}e^{٦x}+Ax^{۲}+B\sin x+C\cos x$ جواب مسأله مقدار اولیه $y'''-٦y''=۳-\cos x$، $y(۰)=۰$، $y'(۰)=۰$، $y''(۰)=۱$ باشد.

٤٨. ذره‌ای در راستای محور xها طوری حرکت می‌کند که سرعت آن در هر زمان $t\geq ۰$ به‌صورت $v(t)=۱/(t^{۲}+۱)$ بیان می‌شود. فرض کنید ذره از مبدأ شروع به حرکت کند. نشان دهید که ذره هرگز به $x=\pi/۲$ نمی رسد.

٤٩. نشان دهید توابع $y_{۱}(x)\equiv ۰$ و $y_{۲}(x)=(x-x_{۰})^{۳}$ که هردو به ازای $-\infty<x<\infty$ تعریف‌شده‌اند، جواب‌های مسأله مقدار اولیه

$$\frac{dy}{dx}=۳y^{۲/۳}\ ,\quad y(x_{۰})=۰$$

می‌باشند.

٥٠. نشان دهید $y=e^{x^{۲}}\int_{۱}^{x}e^{-t^{۲}}\,dt$ جواب مسأله مقدار اولیه $y'=۱+۲xy$، $y(۱)=۰$ است.

فصل ۲ معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

مقدمه

در این فصل دو دسته مهم از معادلات دیفرانسیل مرتبه اول، یعنی معادلات دیفرانسیل مرتبه اول جدایی‌پذیر و معادلات خطی مرتبه اول را به‌صورت تحلیلی و دقیق‌تر موردبررسی قرار می‌دهیم، زیرا بسیاری از معادلات مرتبه اول را می‌توان با ایجاد تغییراتی به این دو دسته معادلات تبدیل کرد. به همین دلیل این دو دسته از معادلات را به‌نوعی می‌توان پایه بسیاری از دسته‌های دیگر معادلات دیفرانسیل مرتبه اول دانست.

۲–۱. معادلات جدایی‌پذیر

ساده‌ترین نوع معادلات دیفرانسیل برای حل کردن، حالتی است که متغیرها قابل‌تفکیک باشند. یک معادله دیفرانسیل به‌صورت $\frac{dy}{dx}=F(x,y)$ را **جدایی‌پذیر** می‌نامند اگر بتوان آن را به‌صورت $\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$ نوشت، که f تنها تابعی از متغیر مستقل x و g تنها تابعی از متغیر وابسته y است. به‌عنوان‌مثال معادله $\frac{dy}{dx}=e^{x}y^{۲}$ جدایی‌پذیر است.

اگر $y(x)$ یک جواب غیرثابت معادله $\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$ باشد و $g\big(y(x)\big)$ روی بازه (a,b) ناصفر باشد، می‌توانیم با تقسیم دو طرف معادله بر $g\big(y(x)\big)$ (فرآیند جداسازی متغیرها) به دست آوریم:

$$\frac{۱}{g\big(y(x)\big)}\frac{dy}{dx}=f(x)\,.$$

اگر $F(x)$ ضد مشتق $f(x)$ و $G(x)$ ضد مشتق $\frac{۱}{g(y)}$ باشد، می‌توانیم با انتگرال‌گیری از دو طرف معادله به دست می‌آوریم:

$$\int\frac{۱}{g\big(y(x)\big)}\frac{dy}{dx}dx=\int\frac{۱}{g(y)}dy=\int f(x)\,dx\,,$$

یا $G\big(y(x)\big)=F(x)+C$، که ثابت‌های انتگرال‌گیری وابسته به G و F در ثابت C جمع شده‌اند (توجه کنید که چگونه برای $G\big(y(x)\big)$ از قاعده زنجیری استفاده می‌کنیم):

$$\frac{d}{dx}G\big(y(x)\big)=G'^{(y(x))\frac{dy}{dx}}=\frac{۱}{g\big(y(x)\big)}\frac{dy}{dx}.$$

به‌این‌ترتیب و با انتگرال‌گیری از دو طرف یک معادله دیفرانسیل جدایی‌پذیر، جواب عمومی آن را تعیین می‌کنیم.

مثال ۱,۱,۲

معادله دیفرانسیل

$$\cos y dx + (1+e^{-x})\sin y dy = 0$$

را در نظر بگیرید. با تفکیک کردن داریم :

$$\frac{dx}{1+e^{-x}} + \frac{\sin y}{\cos y} dy = 0$$

و با انتگرال‌گیری از طرفین داریم:

$$Ln\cos y = Ln(e^{x}+1) + Lnc \qquad \Rightarrow \cos y = c(e^{x}+1)$$

مثال ۲,۱,۲

می‌خواهیم همه جواب‌های معادله $y' = -2y^2x$ را به دست آوریم.داریم $\frac{dy}{dx} = -2y^2x$ و لذا $y^{-2}dy = -2dx$ (با فرض $y \neq 0$) و لذا $-\frac{1}{y} = -x^2 + c$ درنتیجه $y = \frac{1}{x^2 - c}$

توجه کنید که $y = \frac{1}{x^2-c}$ جواب عمومی $y^{-2}dy = -2xdx$ است ولی جواب عمومی $y' = -2y^2x$ نیست چون $y = 0$ جواب $y' = -2y^2x$ است ولی در رابطه $y = \frac{1}{x^2-c}$ هیچ‌گاه y صفر نیست . لذا جواب عمومی معادله اولیه $, y(x) = \frac{1}{x^2-c} \qquad y(x) = 0$ است .

در اینجا سه نکته وجود دارد که باید به آن توجه کرد: **۱)** هر معادله دیفرانسیل مرتبه اولی جدایی‌پذیر نیست، **۲)** حتی پس از جداسازی متغیرها و انتگرال‌گیری، ممکن است نتوان یکی از متغیرها (مانند y) را برحسب متغیر دیگر (مانند x) حل کرد، یعنی ممکن است مجبور شوید پاسخ خود را به‌صورت ضمنی بیان کنید، **۳)** ممکن است نتوانید انتگرال‌گیری را برحسب توابع مقدماتی انجام دهید. در ادامه نمونه‌هایی از حالت‌های ذکرشده را بررسی می‌کنیم.

همچنین توجه کنید که در معادله جدایی‌پذیر $y' = f(x)g(x)$، جواب $g(y) \equiv 0$ یک جواب معادله دیفرانسیل نیز می‌باشد، و حتی ممکن است تنها جواب آن باشد (بخش ۱–۲ را ملاحظه کنید). اگر $g(y) = 0$، آنگاه $y' = 0$ نشان می‌دهد که y یک عدد ثابت است. برعکس اگر $y(x) = c$ یک جواب ثابت باشد،