

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



تحقیق در عملیات

لیلا افراسیابی

عضو هیأت علمی دانشگاه آزاد اسلامی مشهد

سرشناسه: افراسیابی، لیلا، ۱۳۴۹ -
عنوان و نام پدیدآور: تحقیق در عملیات (پژوهش عملیاتی)/ مولف لیلا افراسیابی؛
ویراستار علمی سارا اسکوئیان.
مشخصات نشر: ارسطو (سامانه اطلاع رسانی چاپ و نشر ایران)، ۱۴۰۱.
مشخصات ظاهری: ۲۸۴ ص.: مصور، جدول.
شابک: ۹۷۸-۶۲۲-۳۳۹-۰۳۳-۳
وضعیت فهرست نویسی: فیبا
یادداشت: کتابنامه: ص. ۲۸۱.
یادداشت: نمایه.

Operations research

موضوع: تحقیق عملیاتی

تحقیق عملیاتی -- راهنمای آموزشی (عالی)

Operations research -- Study and teaching (Higher)

شناسه افزوده: اسکوئیان، سارا، ۱۳۶۱-، ویراستار

رده بندی کنگره: T۵۷/۶

رده بندی دیویی: ۰۰۳/۰۷۶

شماره کتابشناسی ملی: ۹۰۹۲۶۴۳

اطلاعات رکورد کتابشناسی: فیبا

نام کتاب: تحقیق در عملیات (پژوهش عملیاتی)

مولف: لیلا افراسیابی

ویراستار علمی: سارا اسکوئیان

ناشر: ارسطو (سامانه اطلاع رسانی چاپ و نشر ایران)

تیراژ: ۱۰۰۰ جلد

نوبت چاپ: اول - ۱۴۰۱

چاپ: مدیران

قیمت: ۱۱۵۰۰۰ تومان

فروش نسخه الکترونیکی - کتاب رسان:

<https://chaponashr.ir/ketabresan>

شابک: ۹۷۸-۶۲۲-۳۳۹-۰۳۳-۳

تلفن مرکز پخش: ۰۹۱۲۰۲۳۹۲۵۵

www.chaponashr.ir



فهرست مطالب

۹	پیشگفتار
۱۱	۱ کلیات تحقیق در عملیات
۱۱	۱-۱ پیدایش تحقیق در عملیات
۱۲	۲-۱ تعریف تحقیق در عملیات
۱۳	۳-۱ ویژگی‌های عمده تحقیق در عملیات
۱۳	۴-۱ رویکرد تحقیق در عملیات برای حل مسأله
۱۷	۲ برنامه‌ریزی خطی
۱۹	۱-۲ اجزای مدل برنامه‌ریزی خطی
۱۹	۲-۲ مدل عمومی برنامه‌ریزی خطی
۲۱	۳-۲ فرم‌های پرکاربرد مدل برنامه‌ریزی خطی
۲۲	۴-۲ نکاتی برای تبدیل فرم‌های مختلف برنامه‌ریزی خطی به فرم‌های استاندارد و متعارفی
۳۱	۵-۲ تمرین
۳۳	۳ مدل‌سازی

۳۳	۱-۳ دلایل استفاده از مدل
۳۳	۲-۳ انواع مدل
۳۴	۳-۳ مثال‌هایی از مدل‌سازی
۴۲	۴-۳ تمرین

۴۵	۴ روش ترسیمی (روش هندسی)
۴۵	۱-۴ مراحل روش ترسیمی
۵۰	۲-۴ روش کلی به دست آوردن جواب بهینه
۵۹	۳-۴ حالات مختلف مسأله برنامه‌ریزی خطی
۸۳	۴-۴ تمرین

۸۵	۵ روش سیمپلکس
۹۶	۱-۵ الگوریتم روش سیمپلکس
۹۷	۲-۵ نکات مورد توجه در روش سیمپلکس
۱۰۸	۳-۵ روش M - بزرگ
۱۲۶	۴-۵ روش دو فازی (دو مرحله‌ای)
۱۲۶	۵-۵ الگوریتم روش دو فازی (دو مرحله‌ای)
۱۳۹	۶-۵ موارد خاص در مسائل برنامه‌ریزی خطی با استفاده از روش سیمپلکس
۱۴۱	۷-۵ نکات مورد توجه در روش‌های سیمپلکس، M - بزرگ و دو فازی
۱۴۳	۸-۵ تمرین

۱۴۷	۶ تحلیل عناصر جداول سیمپلکس و مسأله دوگان
۱۴۷	۱-۶ تحلیل عناصر جداول سیمپلکس
۱۵۲	۲-۶ قیمت سایه‌ای

فهرست مطالب ۷

۱۵۴	۳-۶ مسأله دوگان (ثانویه)
۱۵۸	۴-۶ رابطه مسأله اولیه و دوگان در شکل متقارن
۱۶۱	۵-۶ روابط مسأله اولیه و دوگان
۱۶۵	۶-۶ قضایای دوگان
۱۷۷	۷-۶ روابط بین ناحیه جواب و جواب مسائل اولیه و دوگان
۱۸۶	۸-۶ روش سیمپلکس دوگان
۱۸۷	۹-۶ الگوریتم روش سیمپلکس دوگان
۱۹۶	۱۰-۶ تمرین

۲۰۰

سوالات چهارگزینه‌ای

۲۱۲

پاسخ تمرینات

۲۸۰

مراجع

۲۸۲

نمایه

پیشگفتار

کتاب حاضر دربرگیرنده‌ی سرفصل‌های تحقیق در عملیات یا پژوهش عملیاتی در دوره‌های کارشناسی رشته‌های صنایع، مدیریت و حسابداری است. همچنین مطالعه این کتاب برای دانشجویان رشته ریاضی نیز سودمند و مفید می‌باشد.

این کتاب تلاشی در جهت تهیه متنی ساده، قابل فهم و روان برای دانشجویان می‌باشد. در این کتاب سعی شده است ضمن پوشش تمام سرفصل‌های ارائه شده در تمام دانشگاه‌ها، از اثبات قضیه‌ها خودداری شود و به جای آن با مثال‌های ساده و مسائل حل شده‌ی مناسب، درک مفاهیم سخت را آسان سازیم. تجربه ۲۵ سال تدریس دروس ریاضی در دانشگاه‌ها و تدریس چندین ساله درس تحقیق در عملیات و پژوهش عملیاتی با دانشجویان رشته‌های متفاوت و دانشکده‌های مختلف مرا ترغیب به تدوین و تالیف کتابی در این زمینه نمود، تا دانشجویان یک منبع ساده و قابل درک داشته باشند.

در پشت صحنه‌ی این کتاب افراد حمایتگر و بی‌توقعی حضور دارند که مایلم مراتب قدردانی و سپاس را نسبت به آنها به جا بیاورم. همچنین از زحمات آقای سید مهدی موسوی، خانم فائزه خسروجردی و مهسا غلامی برای تایپ و حروف‌چینی با نرم‌افزار لتک تلاش فراوان و مستمری داشتند سپاسگزار می‌نمایم. همچنین شایسته است از زحمات خانم پریا افراز مدیر مؤسسه پویندگان راه نشر اساتید که زحمت چاپ و انتشار کتاب را بر عهده گرفته‌اند قدردانی کنم.

لیلا افراسیابی

پاییز ۱۴۰۱

کلیات تحقیق در عملیات

تحقیق در عملیات کاربرد یک رویکرد علمی است که در صدد حل مسائل مدیریتی می‌باشد و هدف آن کمک به مدیران جهت تصمیم‌گیری بهتر است. در دنیای کنونی که دنیای رقابتی و پرشتاب است به تصمیم‌گیران وابستگی زیادی دارد به طوریکه اتخاذ تصمیم درست موجب رشد سازمان و تصمیم‌گیری نادرست باعث از دست رفتن موقعیت‌های پیشرفت و حتی نابودی آن سازمان خواهد شد.

از تحقیق در عملیات در زمینه‌های مختلف از جمله برنامه‌ریزی تولید، تخصیص منابع، تبلیغات، ترافیک و... استفاده می‌شود. به عبارت دیگر تحقیق در عملیات را در انواع مختلفی از سازمان‌های دولتی، نظامی، خدماتی، بازرگانی، صنعتی، آموزشی، بهداشتی و... می‌توان بکار برد.

۱-۱ پیدایش تحقیق در عملیات

موضوع تحقیق در عملیات در طول جنگ جهانی دوم توسط دانشمندان انگلیسی توسعه و گسترش یافت. مدیریت جنگی، گروهی از دانشمندان را که با مسائل تاکتیکی و استراتژیک در رابطه با دفاع هوایی و زمینی آشنایی داشتند، مامور تحقیقاتی در این زمینه نمود. دلیل اصلی انجام چنین مطالعاتی محدودیت منابع و بودجه نظامی بود. چنانچه از نام تحقیق در عملیات برمی‌آید. علت بکارگیری آن ماهیت تیمی بود که بر روی عملیات (نظامی) تحقیق می‌نمودند. دانشمندان مسائل گوناگون را مورد تحقیق قرار داده و نیز

براساس مطالعه‌ی کمی در عملیات، شیوه‌های معینی را پیشنهاد می‌نمودند که موفقیت قابل ملاحظه‌ای به همراه داشت. نتایج ارزشمند تحقیق در عملیات توسط تیم انگلیسی به سرعت مدیریت نظامی ایالات متحده را به فعالیت‌هایی در این زمینه ترغیب نمود. نوآوری‌های موفقیت‌آمیز توسط تیم‌های آمریکایی شامل توسعه‌ی الگوهای جدید پرواز، برنامه‌ریزی در مین‌گذاری دریا، بهره‌برداری از تجهیزات الکترونیکی می‌شد. در این رابطه گروه‌های تحقیق در عملیات مشابهی در دیگر کشورها از جمله کانادا و فرانسه مشغول به فعالیت شدند.

پس از جنگ، موفقیت‌های گروه‌های نظامی، توجه مدیران صنعتی را به خود جلب نمود. مدیران در جستجوی راه‌حلی برای حل مسائل خود و در صدد استفاده از موثرترین روش‌های تحقیق در عملیات در امر تصمیم‌گیری بودند. همزمان با رونق اقتصادی بعد از جنگ مسائل ناشی از افزایش تخصص و پیچیدگی در سازمانها بوجود آمد. تعداد زیادی از کارشناسان از جمله مشاورین صنعتی و اقتصادی که در خلال جنگ با گروه‌های تحقیق در عملیات همکاری داشتند به تدریج در می‌یافتند که محتوای مسائل اقتصادی و صنعتی با مسائل نظامی تفاوتی ندارد و تنها شکل به‌کارگیری آنها بایکدیگر متفاوت است. به این ترتیب تحقیق در عملیات به خدمت صنعت، اقتصاد و فعالیت‌های مختلف درآمد.

دو عامل مهم در رشد و پیشرفت روز افزون تحقیق در عملیات نقش عمده داشتند که عبارتند از:

۱. پیشرفت‌های چشمگیری که در همان اوایل در زمینه توسعه فنون مربوط به تحقیق در عملیات صورت گرفت از جمله این که در سال ۱۹۴۷ دانتزیک روش حل مسائل برآمده ریزی خطی را گسترش داد.
۲. توسعه کامپیوتر (رایانه) است که توانایی عجیبی در سرعت محاسباتی و ذخیره کردن و بازخوانی داشت و می‌توانست عملیات تکراری و طولانی روش‌های محاسباتی مختلف را در زمان اندک انجام دهد.

۲-۱ تعریف تحقیق در عملیات

مهم‌ترین و جامع‌ترین تعریف تحقیق در عملیات، کاربرد روش‌های علمی برای تجزیه و تحلیل، حل مسائل و تصمیمات مدیریتی است. به بیان دیگر تحقیق در عملیات مجموعه‌ای از مدلها و تکنیک‌های کمی است که با استفاده از روش‌های علمی، مدیران را در امر تصمیم‌گیری هدایت و راهنمایی می‌کند.

۳-۱ ویژگی‌های عمده تحقیق در عملیات

۱. برخورد علمی و آگاهانه با مسائل واقعی

۲. به کارگیری روش‌های علمی

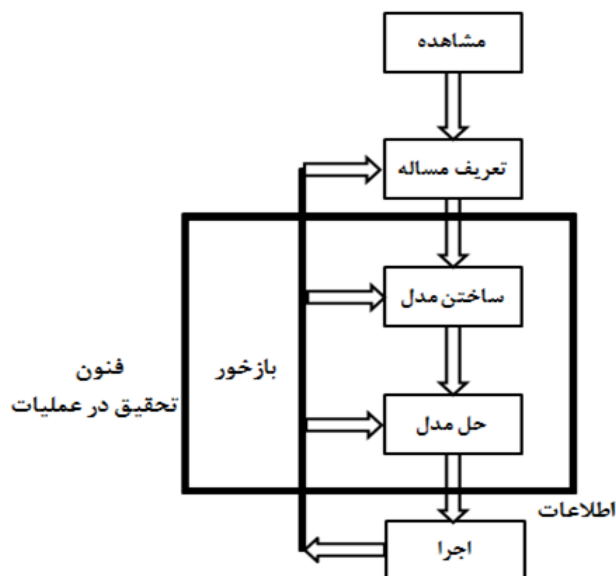
۳. استفاده از متخصصین علوم مختلف

۴. استفاده از مدل

۵. استفاده از کامپیوتر به وفور

۴-۱ رویکرد تحقیق در عملیات برای حل مسأله

ویژگی اصلی و فنون تحقیق در عملیات تاکید بر رویکرد سیستماتیک و منطقی در حل مسأله است. مراحل این رویکرد را در شکل زیر ملاحظه می‌کنید.



شکل ۱-۱ فرآیند حل مسأله

حال به شرح هریک از مراحل فرآیند حل مسأله می‌پردازیم.

مشاهده

اولین قدم در فرآیند تحقیق در عملیات تعریف مسأله‌ای است که در سیستم یا سازمان وجود دارد. هر سیستم به طور مداوم در معرض مسائل و مشکلاتی است که مانع رسیدن آن سیستم به اهداف خود می‌شوند. مدیر سازمان یا متخصصان آن سیستم موظفند تا به مشاهده عوامل سازمان و روابط در تعامل با هم بپردازند تا بتوانند به آسیب شناسی سازمانی و تعریف مسأله دست یابند.

تعریف مسأله

هرگاه مشخص شد که در سازمان مسأله‌ای وجود دارد باید آن را به دقت و وضوح تعریف کرد. دقیق دیدن مسأله و درجه‌ای که مسأله می‌تواند بر عملکردهای سازمانی موثر باشد از ملزومات تعریف مسأله است.

ساختن مدل

مدل در تحقیق در عملیات بیان خلاصه و مجردی از یک مسأله در دنیای واقعی و سازمانی است. مدل می‌تواند در قالب یک شکل یا نمودار بیان گردد، اما اغلب در تحقیق در عملیات مدل شامل مجموعه‌ای از روابط ریاضی خواهد بود.

حل مسأله

مسأله فرموله شده در قالب یک مدل تحقیق در عملیات باید براساس فنون مورد استفاده در تحقیق در عملیات حل شود. هر یک از فنون تحقیق در عملیات برای حل یک مدل خاص کاربرد دارد.

اجرای نتایج

فنون حل مسأله در تحقیق در عملیات فراهم کننده اطلاعاتی هستند که مدیر را در تصمیم‌گیری بهتر یاری می‌دهند. در تصمیم‌گیری نهایی مدیر باید اطلاعات حاصل از حل مدل و تجربیات خود و مشاوران را ترکیب نماید.

تکرارپذیر بودن فرآیند تحقیق در عملیات

تکمیل مراحل پنج گانه تحقیق در عملیات ضرورتاً به معنای کامل بودن فرآیند نیست. چه بسا در هر مرحله از ساخت مدل، حل و اجزاء، ضرورت بازنگری پدید آید و همواره باید مدل را بازنگری و بازسازی کرد. بازنگری در هر مرحله فرآیند تحقیق در عملیات با استفاده از عامل بازخور در سیستم و یا فرآیند حاصل می‌شود.

باتوجه به شکل ۱-۱ درمی‌یابیم که به مجموعه فنون ساخت مدل و حل آن فنون تحقیق در عملیات گویند. نتیجه حاصل از مجموعه فنون تحقیق در عملیات را اطلاعات گویند که ملاک تصمیم‌گیری نهایی مدیریت است.

برنامه‌ریزی خطی

یکی از روش‌های متداول برای بهینه کردن یک هدف باتوجه به محدودیت‌های مختلف تکنیک برنامه‌ریزی خطی است.

برنامه‌ریزی خطی مدلی ریاضی است برای تخصیص بهینه منابع (سرمایه، مواد اولیه، نیروی انسانی، تجهیزات و...) و به منظور دستیابی به یک هدف خاص (حداکثر کردن سود یا حداقل کردن هزینه) هنگامی که چند راهکار برای استفاده از منابع وجود دارد.

مدل برنامه‌ریزی خطی دارای یک تابع هدف و چند محدودیت است که روابط خطی بین متغیرهای آن در تابع هدف و محدودیت‌ها وجود دارد. نام برنامه‌ریزی خطی برگرفته از این واقعیت است که روابط کارکردی در مدل ریاضی، خطی هستند و تکنیک حل مدل شامل مراحل ریاضی از پیش تعیین شده بعنوان برنامه می‌باشد.

مثال‌هایی از برنامه‌ریزی خطی

۱. رئیس یک پالایشگاه نفت در نظر دارد با افزایش ظرفیت، بعضی از قسمتهای فرآیند پالایش نفت و در نهایت تولید کارخانه را بهبود بخشد. از بین فرایندهای مختلف پالایش نفت می‌خواهد بداند کدامیک را به چه ظرفیتی باید افزایش دهد تا بیشترین بازدهی در مقایسه با هزینه‌های سرمایه‌گذاری حاصل شود.

۲. تولید کننده‌ای از مواد خام مختلف برای تولید محصولات گوناگون در خط تولید استفاده می‌کند. قیمت مواد خام متناسب با تغییرات بازار است و در بعضی موارد می‌توان برای سفارشات با حجم زیاد از تخفیف قابل توجهی استفاده کرد. تولید کننده می‌خواهد نوع مواد خام مورد نیاز برای تولید را انتخاب نماید چنانچه امکان تهیه یکی از موادی که فعلا استفاده نمی‌شود با قیمت کمتر وجود داشته باشد. آنگاه با چه قیمتی جایگزینی آن با مواد دیگر به صرفه بوده و سود بیشتری بدست می‌دهد.

چهار مرحله اساسی که در بکارگیری برنامه‌ریزی خطی باید طی شود عبارتند از:

۱. مسأله به گونه‌ای باشد که با برنامه‌ریزی خطی قابل حل باشد.
۲. مسأله باید در قالب یک مدل ریاضی فرمول بندی شود.
۳. مسأله باید با استفاده از یک روش مشخص ریاضی قابل حل باشد.
۴. برای تحلیل نتایج از افراد خبره، با تجربه و آشنا به مسأله واقعی استفاده شود تا تصمیم درست و صحیحی اتخاذ شود.

مراحل حل مسأله

در شکل زیر مراحل حل مسأله را ملاحظه می‌کنید.



برای ساختن مدل برنامه‌ریزی خطی یک مسأله، آشنایی با اجزای آن ضروری است که در زیر به آن اشاره می‌کنیم.

۱-۲ اجزای مدل برنامه‌ریزی خطی

۱. متغیرهای تصمیم: نمادهای ریاضی هستند که میزان عملکرد یا سطح فعالیت را بیان می‌کنند و معمولاً با x_j نشان داده می‌شوند.

۲. تابع هدف: یک رابطه ریاضی خطی است که هدف را در قالب متغیرهای تصمیم توصیف می‌کند. تابع هدف همواره به صورت حداکثر کردن (Max) و یا حداقل کردن (Min) بیان می‌شود.

۳. محدودیت‌های کارکردی (قیود): روابط خطی میان متغیرها هستند و بیانگر محدودیت‌های منابع جهت رسیدن به اهداف مدل می‌باشند. این روابط به صورت بزرگتر مساوی (\geq)، کوچکتر مساوی (\leq) و یا مساوی ($=$) نمایش داده می‌شوند.

۲-۲ مدل عمومی برنامه‌ریزی خطی

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Max(Min)} & Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad \text{تابع هدف} \\ \text{s. t.} & \\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n (\leq \text{ یا } = \text{ یا } \geq) b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n (\leq \text{ یا } = \text{ یا } \geq) b_2 \quad \text{محدودیت‌های کارکردی} \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n (\leq \text{ یا } = \text{ یا } \geq) b_m \\ & x_j \geq 0 \text{ یا } x_j \leq 0 \text{ یا } x_j \text{ آزاد در علامت} \quad j = 1, 2, \dots, n \end{array} \right.$$

مفاهیم و نمادها در مدل برنامه‌ریزی خطی

پارامترها: مقادیری که به صورت اعدادی ثابت در محدودیت‌ها و تابع هدف مسأله استفاده می‌شوند پارامترهای مدل نامیده می‌شوند.

a_{ij} : عددی است که در ستون‌های j ام محدودیت i ام واقع شده و بیانگر میزان استفاده از منبع i ام برای انجام یک واحد فعالیت j ام است. ضرایب a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$) را ضرایب تکنولوژی (فنی) می‌نامند.

c_j : ضریب متغیر x_j در تابع هدف است که سهم هر واحد از فعالیت j ام را در سود یا هزینه بدست آمده نشان می‌دهد.

b_i : مقدار سمت راست محدودیت i ام است که موجودی منبع i ام و یا سقف تقاضای i ام را در محدودیت‌ها مشخص می‌کند.

x_j : متغیر تصمیم j ام است که سطح فعالیت یا مقدار تولید را نشان می‌دهد.

Z : تابع هدف است که باتوجه به محدودیت‌ها باید حداکثر یا حداقل شود.

فرم خلاصه شده مدل عمومی برنامه‌ریزی خطی

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max(Min)} \quad Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \\ \text{s. t.} \\ \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j (\leq \text{ یا } = \text{ یا } \geq) b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \\ x_j \geq 0 \text{ یا } x_j \leq 0 \text{ یا } x_j \text{ آزاد در علامت} \quad j = 1, 2, \dots, n \end{array} \right.$$

۳-۲ فرم‌های پرکاربرد مدل برنامه‌ریزی خطی

۱. فرم متعارفی (کانونی)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max } Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s. t.} \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s. t.} \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \end{array} \right.$$

۲. فرم استاندارد

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max(Min)} \quad Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s. t.} \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (b_i \geq 0) \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \end{array} \right.$$

۴-۲ نکاتی برای تبدیل فرم‌های مختلف برنامه‌ریزی خطی به فرم‌های استاندارد و متعارفی

۱. تبدیل متغیرها به متغیر نامنفی

الف) متغیر نامثبت x_j ($x_j \leq 0$)

با تغییر متغیر $x_j = -x'_j$ متغیر نامنفی x'_j بدست می‌آید.

$$\begin{cases} x_j = -x'_j \\ x'_j \geq 0 \end{cases}$$

ب) متغیر آزاد در علامت (نامقید) x_j

با تغییر متغیر زیر متغیر آزاد در علامت x_j با دو متغیر نامنفی x'_j و x''_j جایگزین می‌شود.

$$\begin{cases} x_j = x'_j - x''_j \\ x'_j, x''_j \geq 0 \end{cases}$$

۲. تبدیل مسأله برنامه‌ریزی خطی Min به مسأله Max و بالعکس

هریک از مسائل برنامه‌ریزی خطی را می‌توان از نوعی به نوع دیگر تبدیل کرد.

$$\text{Max } Z = -\text{Min}(-Z)$$

$$\text{Min } Z = -\text{Max}(-Z)$$

۳. تغییر علامت در محدودیت‌ها

الف) با ضرب طرفین یک محدودیت نامساوی در یک منفی جهت نامساوی عوض می‌شود.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \implies \sum_{j=1}^n -a_{ij}x_j \geq -b_i$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i \implies \sum_{j=1}^n -a_{ij}x_j \leq -b_i$$

ب) یک محدودیت تساوی با دو محدودیت نامساوی جایگزین می شود و بالعکس

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \iff \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i \end{cases}$$

۴. تبدیل محدودیت نامساوی به محدودیت تساوی

الف) اگر علامت محدودیت به صورت کوچکتر مساوی باشد آنگاه برای تبدیل آن به صورت محدودیت تساوی به سمت چپ آن محدودیت متغیر کمکی به نام متغیر کمبود اضافه می شود و علامت آن متغیر کمبود همواره نامنفی خواهد بود.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \implies \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + s_i = b_i \quad (s_i \geq 0)$$

ب) اگر علامت محدودیت به صورت بزرگتر مساوی باشد آنگاه برای تبدیل آن به محدودیت تساوی از سمت چپ آن محدودیت متغیر کمکی به نام متغیر مازاد کم می شود و علامت آن متغیر مازاد همواره نامنفی خواهد بود.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i \implies \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - s_i = b_i \quad (s_i \geq 0)$$

مثال ۲-۴-۱ فرم متعارفی و استاندارد مسائل برنامه ریزی خطی را بنویسید.

$$\begin{array}{l}
 \text{الف)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } Z = 2x_1 + x_2 \\ \text{s. t.} \\ x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ -3x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \\
 \text{ب)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } Z = -2x_1 + 3x_2 \\ \text{s. t.} \\ x_1 + 3x_2 \leq -4 \\ -3x_1 + 7x_2 \geq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \\
 \text{پ)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } Z = 2x_1 + x_2 \\ \text{s. t.} \\ x_1 + 2x_2 = 4 \\ -3x_1 + 4x_2 \geq 3 \\ x_1 \leq 0, x_2 \text{ آزاد در علامت} \end{array} \right. \\
 \text{ت)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } Z = -2x_1 + 3x_2 \\ \text{s. t.} \\ x_1 + 3x_2 \geq -4 \\ -3x_1 + 7x_2 = 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0 \end{array} \right.
 \end{array}$$

حل.

$$\text{الف)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } Z = 2x_1 + x_2 \\ \text{s. t.} \\ x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ -3x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

در فرم متعارفی مسأله Min باید محدودیت‌ها و متغیرها به صورت بزرگتر مساوی (\geq) باشد بنابراین با ضرب طرفین محدودیت اول در یک منفی خواهیم داشت.

$$\text{فرم متعارفی} \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } Z = 2x_1 + x_2 \\ \text{s. t.} \\ -x_1 - 3x_2 \geq -4 \\ -3x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

در فرم استاندارد مسأله برنامه‌ریزی خطی محدودیت‌ها به صورت تساوی و متغیرها نامنفی می‌باشند. دو محدودیت با استفاده از متغیرهای کمکی s_1 و s_2 به تساوی تبدیل می‌شود. بنابراین فرم استاندارد به صورت زیر است.

$$\text{فرم استاندارد} \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } Z = 2x_1 + x_2 \\ \text{s. t.} \\ x_1 + 3x_2 + s_1 = 4 \\ -3x_1 + 2x_2 - s_2 = 3 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\text{ب) } \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } Z = -2x_1 + 3x_2 \\ \text{s. t.} \\ x_1 + 3x_2 \leq -4 \\ -3x_1 + 7x_2 \geq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

با ضرب طرفین محدودیت دوم در یک منفی، محدودیت به محدودیت کوچکتر مساوی (\leq) تبدیل می‌شود.