به نام خدا

ریاضی دوازدهم انسانی

مولف :

فرهاد شعبانی

انتشارات ارسطو
(سازمان چاپ و نشر ایران - ۱۴۰۲)
نسخه الکترونیکی این اثر در سایت سازمان چاپ و نشر ایران و اپلیکیشن کتاب رسان موجود می باشد
chaponashr.ir

سرشناسه : شعبانی، فرهاد، ۱۳۶۶
عنوان و نام پدیدآور : ریاضی دوازدهم انسانی/ مولف فرهاد شعبانی.
مشخصات نشر : ارسطو (سامانه اطلاع رسانی چاپ و نشر ایران)، ۱۴۰۲.
مشخصات ظاهری : ۲۱۷ ص.
شابک : ۳-۱۶۱-۳۳۹-۶۲۲-۹۷۸
وضعیت فهرست نویسی : فیپا
موضوع : آموزش ریاضی
رده بندی کنگره : HD۶۲/۸
رده بندی دیویی : ۶۵۸/۱۸
شماره کتابشناسی ملی : ۹۱۸۱۸۲۸
اطلاعات رکورد کتابشناسی : فیپا

نام کتاب : ریاضی دوازدهم انسانی
مولف : فرهاد شعبانی
ناشر : ارسطو (سامانه اطلاع رسانی چاپ و نشر ایران)
صفحه آرایی، تنظیم و طرح جلد: پروانه مهاجر
تیراژ : ۱۰۰۰ جلد
نوبت چاپ : اول – ۱۴۰۲
چاپ : زبرجد
قیمت : ۱۷۴۰۰۰ تومان
فروش نسخه الکترونیکی – کتاب‌رسان :
https://chaponashr.ir/ketabresan
شابک : ۳-۱۶۱-۳۳۹-۶۲۲-۹۷۸
تلفن مرکز پخش : ۰۹۱۲۰۲۳۹۲۵۵
www. chaponashr. ir

انتشارات ارسطو

«فهرست کامل»

۱

شمارش

بخش ۱
اصل‌های شمارش

شمارش تعداد حالت‌های ممکن برای انجام یک کار، دارای کاربردهای گوناگون است. این نوع محاسبات، بر مبنای دو اصل زیر صورت می‌گیرد:

اصل جمع:
فرض کنید یک کار A به m روش و کار دیگری چون B به n روش مختلف قابل انجام باشد. اگر بخواهیم یکی از کارهای A **یا** B را انجام دهیم:
این کار به $m+n$ طریق مختلف قابل انجام است.

برای نمونه؛
اگر در یک فروشگاه، ۲ مدل کفش (مثلاً: A و B) و ۳ مدل کیف (مثلاً: X، Y و Z) مورد پسند شما واقع شود و بخواهید یک کفش یا یک کیف بخرید، تعداد $۲+۳=۵$ انتخاب خواهید داشت:

A یا B یا X یا Y یا Z

اصل دوم معمولاً کاربرد بیشتری در شمارش تعداد روش‌ها دارد:

اصل ضرب:
فرض کنید کار A به m روش گوناگون قابل انجام بوده و برای هر یک از این m روش، کار دیگری چون B به n روش مختلف قابل انجام باشد. اگر بخواهیم کارهای A **و** B را همزمان انجام دهیم:
این کار به $m\times n$ طریق مختلف قابل انجام است.

برای نمونه؛
اگر مانند قبل، ۲ مدل کفش A و B و ۳ مدل کیف X، Y و Z مورد پسند واقع شود و بخواهید یک کفش و یک کیف بخرید، تعداد $۲\times۳=۶$ انتخاب خواهید داشت:

(A و X) - (A و Y) - (A و Z) - (B و X) - (B و Y) - (B و Z)

مثال: به هر مورد زیر پاسخ دهید.
الف) چند حالت برای انتخاب «یک عدد اول یک رقمی» یا «یک عدد دو رقمی مضرب ۱۰» وجود دارد؟
ب) چند حالت در پرتاب دو سکه با هم رخ می‌دهد؟

پاسخ

الف) عددهای اول یک رقمی: ۲، ۳، ۵ و ۷ (۴ مورد). عدد دو رقمی مضرب ده: ۱۰، ۲۰، ... و ۹۰ (۹ مورد).

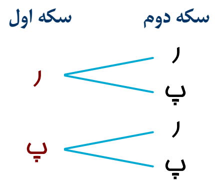
طبق اصل جمع:

$$۴+۹=۱۳$$

ب) هر سکه دو حالت «ر» و «پ» دارد، طبق اصل ضرب: $۴=۲\times۲$.

توجه کنید:

در پرتاب سکه و تاس، برای درک بهتر، می‌توانید با نمودار درختی حالت‌ها را نمایش دهید:



$\Rightarrow$ (ر , ر) , (ر , پ) , (پ , ر) , (پ , پ)

گاهی هر دو اصل در کنار هم به‌کار می‌روند؛ نمونه‌های بعدی را ببینید.

مثال: الف) پرتاب یک سکه و یک تاس با هم چند حالت دارد؟

ب) یک تاس پرتاب می‌شود؛ اگر ۶ بیاید، یک تاس دیگر و در غیر این صورت، دو سکه پرتاب می‌شود. در کل چند حالت رخ می‌دهد؟

پاسخ

الف) سکه دو حالتی و تاس شش حالتی است، طبق اصل ضرب: $۱۲=۶\times۲$.

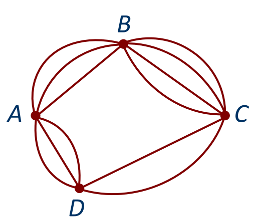
ب) در **حالت (۱)**، تاس اول یک حالتی و تاس دوم شش حالتی است: $۶=۶\times۱$. در **حالت (۲)**، تاس اول پنج حالت و دو سکه بعدی چهار حالت دارند: $۲۰=۴\times۵$. تعداد کل حالت‌ها طبق اصل جمع:

$$۶+۲۰=۲۶$$

(در این مثال هم نمایش حالت‌ها با نمودار درختی دید بهتری به شما خواهد داد.)

مثال: (از متن کتاب)

مطابق شکل، بین چهار شهر مسیرهایی وجود دارد.



الف) به چند روش می‌توان از شهر A به شهر C، از طریق شهر B سفر کرد؟

ب) به چند روش می‌توان از شهر A به شهر C سفر کرد؟

پ) به چند روش می‌توان از شهر B به شهر D سفر کرد؟

پاسخ

الف) باید از A به B (۳ روش) و سپس از B به C (۴ روش) برویم. طبق اصل ضرب:

تعداد روش‌ها: $۱۲=۴\times۳$

ب) در این مورد باید دو نوع مسیر را در نظر بگیرید:

رفتن از A به C از طریق B: **تعداد** $۱۲=۴\times۳$ **روش**

رفتن از A به C از طریق D: **تعداد** $۶=۲\times۳$ **روش**

طبق اصل جمع:

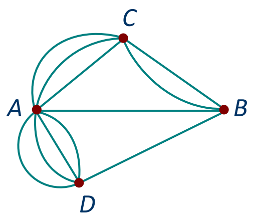
تعداد روش‌ها: $۱۲+۶=۱۸$

پ) مشابه قسمت قبل، کاربرد اصل‌های جمع و ضرب به صورت ترکیبی:

تعداد روش‌ها: $۳\times۳+۴\times۲=۹+۸=۱۷$

مثال: (نهایی- خرداد ۱۴۰۰)

بین چهار شهر A و B و C و D مطابق شکل راه‌هایی وجود دارد. مشخص کنید به چند طریق می‌توان از شهر C و بدون عبور از شهر B، به شهر D سفر کرد؟

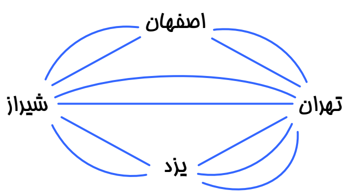


پاسخ

فقط می‌توان مسیر $C \leftarrow A \leftarrow D$ را استفاده کرد. طبق اصل ضرب:

$$۳\times۴=۱۲$$

مثال: می‌خواهیم از تهران به شیراز سفر کرده و دوباره به تهران بازگردیم. اگر بخواهیم طبق مسیرهای شکل، حرکت کنیم و مطلع باشیم که یکی از مسیرهای میان یزد و شیراز مسدود شده باشد، به چند روش می‌توان مسافرت را انجام داد؟



پاسخ

سه روش کلی برای رفتن از تهران به شیراز وجود دارد:

از طریق اصفهان: $۲\times۲=۴$ یا **از طریق یزد:** $۳\times۱=۳$ یا **مستقیم:** ۲

پس در کل $۴+۳+۲=۹$ روش برای رفتن وجود دارد. چون به همین تعداد روش برای برگشت وجود دارد، طبق اصل ضرب:

$$۹\times۹=۸۱$$

توجه کنید:

اصل‌های شمارش برای بیش از دو کار نیز به‌طریق مشابه برقرار هستند:

اگر کار اول به n_1 روش، کار دوم به n_2 روش و . . . . قابل انجام باشند، آنگاه انجام تمام این کارها با هم به $n_1\times n_2\times\cdots$ روش مختلف قابل انجام است. (انجام یکی از این کارها به $n_1+n_2+\cdots$ روش انجام می‌شود.)

مثال: از بین ۴ پیراهن قرمز، ۴ پیراهن آبی و ۲ پیراهن سبز، به چند روش می‌توانیم:

الف) یک پیراهن انتخاب کنیم؟

ب) سه پیراهن (از هر رنگ یکی) انتخاب کنیم؟

0916 992 5753
farhad.shabani66

پاسخ

الف) چون باید قرمز یا آبی یا سبز انتخاب شود، طبق اصل جمع: $۴+۴+۲=۱۰$

ب) باید سه کار با هم انجام شوند:

یک پیراهن قرمز انتخاب شود. و **یک پیراهن آبی انتخاب شود.** و **یک پیراهن سبز انتخاب شود.**

طبق اصل شمارش ضرب:

$$۴\times۴\times۲=۳۲$$

------------✧------------

مثال: الف) چند عدد سه رقمی با ارقام غیر صفر وجود دارد؟

ب) چند عدد سه رقمی با ارقام غیر تکراری وجود دارد؟

پاسخ

الف) چون انتخاب یکان و دهگان و صدگان هر کدام ۹ روش دارد:

$$۹\times۹\times۹=۷۲۹$$

ب) این‌جا یک محدودیت داریم که ابتدا باید وضعیت آن مشخص گردد:

رقم صدگان نباید صفر قرار گیرد، چون عدد سه رقمی نمی‌شود.

- پس صدگان ۹ انتخاب دارد. (انتخاب رقم از ۱ تا ۹)
- چون تکرار ارقام مجاز نیست، رقم به‌کار رفته در صدگان نباید در دهگان قرار گیرد. (۹ انتخاب از بین ۱۰ رقم ممکن)
- بالاخره، دو رقم بکار رفته در صدگان و دهگان نباید در یکان به‌کار روند.

$$۹\times۹\times۸=۶۴۸$$

صدگان دهگان یکان

------------✧------------

مثال: به هر مورد زیر پاسخ دهید.

الف) به چند روش می‌توان به طور تصادفی به ده سؤال چهار گزینه‌ای پاسخ داد؟

ب) چند تابع از مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳\}$ به مجموعه‌ی $B=\{a,b,c,d\}$ وجود دارد؟

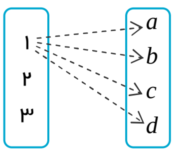
پاسخ

الف) برای هر سؤال ۴ انتخاب داریم و طبق اصل ضرب برای ده سؤال:

$$\underbrace{\underline{۴}\times\underline{۴}\times\cdots\times\underline{۴}}_{\text{۱۰ تا}}=۴^{۱۰}$$

ب) به نمودار ون روبرو نگاه کنید:

چنان‌که می‌بینید، برای عضو ۱ در دامنه، چهار انتخاب a، b، c یا d وجود دارد. برای هر کدام از عضوهای ۲ و ۳ نیز، چهار انتخاب داریم. پس، طبق اصل شمارش ضرب:



$$۴\times۴\times۴=۴^{۳}$$

توجه کنید:

وقتی برای جایگاه حروف یا ارقام شرط داریم، ابتدا تعداد حالات طبق شرایط را نوشته و سپس بقیه موارد را تعیین کنید.

مثال: با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد سه رقمی فرد (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

پاسخ

اصل ضرب بکار می‌رود، زیرا:

باید رقم یکان و رقم دهگان و رقم صدگان انتخاب شوند تا عدد سه رقمی تشکیل گردد!

ابتدا حالات رقم یکان: سه انتخاب ۱، ۳ و ۵ وجود دارد. **(۳ روش)**

بعد رقم سمت راست: رقم ۰ و رقم بکار رفته در یکان نمی‌توانند قرار گیرند، چون تکرار ارقام مجاز نیست. **(۴ روش)**

رقم وسط: غیر از دو رقم بکار رفته تا این‌جا، بقیه‌ی ارقام مجاز هستند. **(۴ روش)**

بنابراین:

$$\underline{۴}\times\underline{۴}\times\underline{۳}=۴۸$$

غیر از ۰ و رقم قرار داده شده در یکان — سایر ارقام — رقم فرد

روش زیر گاهی باعث ساده‌تر شدن محاسبات می‌شود:

تکنیک متمم:

هرگاه محاسبه‌ی تعداد روش‌ها به روش مستقیم غیر ممکن و یا مشکل باشد، از روش غیر مستقیم **(متمم)** استفاده می‌کنیم. یعنی:

- تعداد حالات مخالف شرایط سؤال را تعیین می‌کنیم.
- عدد بدست آمده در مرحله‌ی قبل را از تعداد کل حالت‌ها کم می‌کنیم.

نمونه‌های ببینید.

مثال: با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد سه رقمی زوج بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

پاسخ

تعداد کل اعداد سه رقمی بدون تکرار ارقام که با این پنج رقم تشکیل می‌شود، برابر است با:

$$\underline{۵}\times\underline{۵}\times\underline{۴}=۱۰۰$$

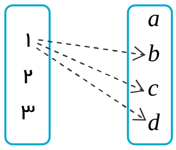
چون طبق مثالی از قبل، ۴۸ تا از آن‌ها فرد هستند، پس تعداد عددهای زوج عبارت است از:

$$۱۰۰-۴۸=۵۲$$

مثال: سؤال زیر را به دو روش پاسخ دهید: الف) روش مستقیم ب) روش متمم

چند تابع از $A=\{۱,۲,۳\}$ به $B=\{a,b,c,d\}$ وجود دارد که شامل زوج مرتب $(۱,a)$ نباشد؟

پاسخ



الف) برای این‌که زوج $(۱,a)$ در تابع نباشد، عدد ۱ را نمی‌توانید به a نسبت دهید، در نتیجه برای ۱ فقط سه انتخاب وجود دارد. عضوهای ۲ و ۳ طبق معمول، هر کدام ۴ انتخاب داشته و در نتیجه طبق اصل ضرب:

$$۳\times۴\times۴=۴۸$$

ب) در مثال بالاتر دیدیم که تعداد کل توابع $۴\times۴\times۴=۶۴$ است. خلاف خواسته‌ی سؤال این است که $(۱,a)$ عضو تابع باشد. یعنی:

برای عضو ۱ در دامنه فقط یک انتخاب a وجود دارد.

ولی عضوهای ۲ و ۳ هر کدام ۴ انتخاب داشته و تعداد $۱\times۴\times۴=۱۶$ تابع داریم. جواب طبق روش متمم:

$$۶۴-۱۶=۴۸$$

در محاسباتِ مربوط به شمارش، بسیاری مواقع با ضرب‌های منظم روبرو هستیم، مانند:

$$۵\times۴\times۳\times۲\times۱ \quad \text{یا} \quad ۸\times۷\times۶\times\cdots\times۲\times۱$$

برای محاسبات سریع‌تر در این گونه موارد، یک نماد جدید معرفی می‌کنیم:

فاکتوریل:

برای عدد طبیعی n، «**فاکتوریل**» آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$n!=n\times(n-۱)\times(n-۲)\times\cdots\times۲\times۱$$

در حالت خاص، تعریف می‌کنیم: $۰!=۱$. (توجه کنید: $۱!=۱$ است.)

موارد مهم:

- مقادیر معروف زیر را در ذهن داشته باشید:

$$۲!=۲\times۱=۲\ ,\ ۳!=۳\times۲\times۱=۶\ ,\ ۴!=۴\times۳\times۲\times۱=۲۴\ ,\ ۵!=۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۱۲۰\ ,\ ۶!=۷۲۰$$

- با فاکتوریل نمی‌توانید مانند عددهای معمولی رفتار کنید! برای نمونه، موارد زیر همگی نادرستند:

$$۲!+۳!=۵! \quad \text{و} \quad ۲!\times۳!=۶! \quad \text{و} \quad \frac{۸!}{۴!}=۲!$$ (محاسبات نادرست)

برای تقسیم، از نکته‌ی بعد کمک می‌گیریم. سایر موارد را با تعیین مقدار هر عدد محاسبه کنید؛ مانند:

$$۲!+۳!=۲+۶=۸ \quad \text{و} \quad ۲!\times۴!=۲\times۲۴=۴۸$$ (محاسبات درست)

- مقدار فاکتوریل یک عدد را می‌توان بر حسب فاکتوریل‌های کوچک‌تر نوشت.

0916 992 5753 farhad.shabani66

برای نمونه؛

$$۸!=۸\times۷\times۶\times\underbrace{۵\times\cdots\times۲\times۱}_{۵!}=۸\times۷\times۶\times۵! \quad \text{و} \quad ۹!=۹\times۸\times\underbrace{۷\times\cdots\times۲\times۱}_{۷!}=۹\times۸\times۷!$$

در حالت کلی، در مورد $n!$ می‌توان نوشت:

$$n!=n\times(n-۱)!=n\times(n-۱)\times(n-۲)!=\cdots$$

نتیجه:

تقسیم‌ها را می‌توان با تبدیل فاکتوریل‌های بزرگ‌تر، به فاکتوریل‌های کوچک‌تر و مشترک، ساده کرد. نمونه:

$$\frac{۷!}{۴!}=\frac{۷\times۶\times۵\times۴!}{۴!}=۷\times۶\times۵=۲۱۰$$

مثال: درستی یا نادرستی هر مورد را مشخص کنید:

الف) تساوی $۳!+۳!=۶!$ برقرار است.

ب) (نهایی- خرداد ۱۳۹۹) تساوی $\frac{۶!}{۳!}=۲!$ همواره برقرار است.

پاسخ

الف) نادرست است، زیرا:

$$۳!+۳!=۶+۶=۱۲ \quad \text{و} \quad ۶!=۷۲۰$$

ب) نادرست است:

مقدار سمت راست برابر ۲ و مقدار سمت چپ برابر $\frac{۶\times۵\times۴\times۳!}{۳!}=۶\times۵\times۴=۱۲۰$ است.

مثال: کسر $\frac{۳!\times۹!\times۰!}{۷!\times۴!}$ را ساده کنید.

پاسخ

نوشتن فاکتوریل‌های بزرگ‌تر بر حسب فاکتوریل‌های کوچک‌تر:

$$\frac{۳!\times۹!\times۰!}{۷!\times۴!}=\frac{۳!\times۹\times۸\times۷!\times۱}{۷!\times۴\times۳!}=\frac{۹\times۸\times۱}{۴}=۹\times۲=۱۸$$

مثال: حاصل عبارت $\frac{۶!}{۲!}-\frac{۱۲!}{۸!\times۴!}$ را مشخص کنید.

پاسخ

مشابه موارد قبل:

$$\frac{۱۲!}{۸!\times۴!}-\frac{۶!}{۲!}=\frac{۱۲\times۱۱\times۱۰\times۹\times۸!}{۸!\times۴\times۳\times۲}-\frac{۶\times۵\times۴\times۳\times۲!}{۲!}=\frac{۱۲\times۱۱\times۱۰\times۹}{۴\times۳\times۲}-۶\times۵\times۴\times۳$$

$$=۱۱\times۵\times۹-۳۶۰=۴۹۵-۳۶۰=۱۳۵$$

0916 992 5753 farhad.shabani66

بخش ۲
جایگشت اشیاء

حالت مهمی در شمارش تعداد حالت‌ها را دقیق معرفی می‌کنیم.

جایگشت:

به هر یک از حالت‌هایی که چند شیءِ مختلف کنار هم قرار می‌گیرند یک «**جایگشت**» از آن اشیاءِ گفته می‌شود.

بنابراین:

در جایگشت همواره:

ترتیب قرار گرفتن اشیاء در کنار هم داراي اهمیت است.

نمونه‌های ببینید:

- ABC و ACB دو جایگشت مختلف از حروف A، B و C هستند.
- با حروف کلمه‌ی «امین» جایگشت‌های گوناگونی نوشته می‌شود؛ دو مورد از آن‌ها «نامی» و «مینا» هستند.

توجه کنید:

طبق اصل شمارش ضرب، تعداد جایگشت‌های چهار شیء مختلف برابر: $۴\times۳\times۲\times۱=۴!=۲۴$ و در حالت کلی:

تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز طبق اصل ضرب برابر است با:

$$\underline{n}\times\underline{n-۱}\times\cdots\times\underline{۳}\times\underline{۲}\times\underline{۱}=n!$$

مثال: به چند طریق می‌توان از میان سه نفر متقاضی استخدام در یک شرکت، یک مدیر، یک معاون و یک منشی انتخاب کرد؟

پاسخ

چون ترتیب انتخاب در نوع شغل افراد تأثیر دارد، پس ترتیب مهم بوده و تعداد حالت‌ها برابر است با: $۳!=۶$.

توجه کنید:

چنان‌که قبلاً هم دیده‌ایم، گاهی در جایگشت‌ها شرایطی هم وجود دارد که باید رعایت شود.

مثال: الف) چند عدد پنج رقمی با ارقام فرد وجود دارد؟

ب) پنج رقم فرد ۱، ۳، . . . و ۹ را روی پنج کارت نوشته‌ایم. با جابجایی کارت‌ها، چند عدد پنج رقمی نوشته می‌شود.

پاسخ

الف) پنج رقم فرد $۱,۳,۵,۷,۹$ داریم و هر کدام را می‌توان برای یکان، دهگان و . . . و دهگانِ هزار بکار برد:

تعداد عددها $۵\times۵\times۵\times۵\times۵=۳۱۲۵$

ب) در این حالت تکرار ممکن نیست، (مثلاً؛ کارتی که در یکان قرار می‌گیرد، نمی‌تواند در رقم دیگری هم قرار گیرد)؛ یعنی خود به خود تکرار غیر مجاز است:

تعداد عددها $۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۱۲۰$

مثال: با حروف کلمه‌ی «شیرزاد» چند کلمه‌ی پنج حرفی می‌توان نوشت که با «ا» شروع و به «ز» ختم شده و حرف سوم (از راست) حرف «ش» نباشد؟

پاسخ

حروف شروع و پایان از قبل مشخص بوده و هر کدام دارای ۱ حالت هستند: $\underline{۱}\times\underline{\ \ }\times\underline{\ \ }\times\underline{\ \ }\times\underline{۱}$

حرف سوم از راست نمی‌تواند «ا» یا «ز» یا «ش» باشد و ۳ انتخاب دارد: $\underline{۱}\times\underline{\ \ }\times\underline{۳}\times\underline{\ \ }\times\underline{۱}$

حروف دوم و چهارم از سه حرف باقی‌مانده به ۳ و ۲ روش انتخاب می‌شوند:

$$\underline{۱}\times\underline{۳}\times\underline{۳}\times\underline{۲}\times\underline{۱}=۱۸$$

مثال: چند جایگشت پنج حرفی با حروف کلمه‌ی computer وجود دارد که با c شروع و به r ختم شود؟

پاسخ

حروف شروع و پایان ۱ حالتی هستند. حرف سوم از بین ۶ حرف باقی‌مانده، حرف چهارم از بین ۵ حرف باقی‌مانده و بالاخره حرف آخر از بین ۴ حرفی که قبلاً انتخاب نشده‌اند، انتخاب می‌شوند:

$$\underline{۱}\times\underline{۶}\times\underline{۵}\times\underline{۴}\times\underline{۱}=۱۲۰$$

مثال: (از متن کتاب)

توسط ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵، چند عدد پنج رقمی مضرب ۵، بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

پاسخ

روش اول: (روش مستقیم)

برای رقم یکان دو حالت داریم: ۰ یا ۵. بر حسب این که کدام را قرار دهیم، تعداد حالت‌های رقم سمت چپ متفاوت بوده و در نتیجه لازم است تفکیک شود:

- اگر یکان ۰ باشد، رقم سمت چپ پنج حالتی است: $۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۱۲۰$
- اگر یکان ۵ باشد، رقم سمت چپ چهار حالتی است: $۴\times۴\times۳\times۲\times۱=۹۶$

جواب کل طبق اصل شمارش جمع: $۱۲۰+۹۶=۲۱۶$.

روش دوم: (روش متمم)

تعداد کل حالت‌ها $۵\times۵\times۴\times۳\times۲=۶۰۰$ و حالت‌هایی که بر ۵ بخش‌پذیر نباشد: $۴\times۴\times۳\times۲\times۴=۳۸۴$.

جواب نهایی:

$$۶۰۰-۳۸۴=۲۱۶$$

0916 992 5753	farhad.shabani66

گاهی از بین کل اشیاء موجود، می‌خواهیم تعدادی از آن‌ها را با رعایت ترتیب انتخاب کرده یا با آن‌ها جایگشت بسازیم. در چنین مواردی، از مفهوم بعدی استفاده می‌شود:

تبدیل (انتخابِ با ترتیب):

اگر n شیءِ متمایز داشته باشیم، آنگاه تعداد جایگشت‌های r شیءِ از میان این n شیءِ برابر است با:

$$P(n\ ,\ r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

به این نوع جایگشت، «**تبدیل**» r شیءِ از n شیءِ نیز گفته می‌شود.

توجه کنید:

تعداد تبدیل‌های اشیاء را می‌توان مستقیماً با استفاده از اصل ضرب محاسبه کرد و استفاده از فرمول $P(n\ ,\ r)$ به ندرت انجام می‌شود.

مثال: توسط ۹ نفر دانش‌آموز به چند طریق می‌توان صف‌های ۴ نفره تشکیل داد؟

پاسخ

چون در صف ترتیب مهم است، باید تعداد جایگشت‌های ۴ شیء را از بین ۹ شیء محاسبه کنیم:

$$P(۹\ ;\ ۴)=\frac{۹!}{(۹-۴)!}=\frac{۹!}{۵!}=\frac{۹\times ۸\times ۷\times ۶\times ۵!}{۵!}=۹\times ۸\times ۷\times ۶=۳۰۲۴$$

روش بدون فرمول:

نفر اول صف به ۹ روش، نفر دوم به ۸ روش، نفر سوم به ۷ روش و نفر چهارم را به ۶ روش انتخاب می‌شود و در نتیجه:

$$\underline{۹}\times\underline{۸}\times\underline{۷}\times\underline{۶}=۳۰۲۴$$

مثال: (از متن کتاب)

توسط ارقام ۱، ۲، ۴، ۶، ۸، ۹ و ۷، چند عدد سه رقمی (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

پاسخ

طبق اصل شمارش ضرب و رعایت غیر تکراری بودن:

$$\underline{۷}\times\underline{۶}\times\underline{۵}=۲۱۰$$

مثال: هشت دونده در یک مسابقه شرکت می‌کنند. اگر هیچ دو فردی همزمان به خط پایان نرسند، به چند طریق جوایز نفرات اول تا سوم می‌تواند توزیع شود؟

پاسخ

باید سه نفر از بین هشت نفر به ترتیب انتخاب شده و به عنوان نفرات اول تا سوم جوایز را دریافت کنند:

$$P(۸\ ;\ ۳)=\frac{۸!}{(۸-۳)!}=\frac{۸!}{۵!}=\frac{۸\times ۷\times ۶\times ۵!}{۵!}=۸\times ۷\times ۶=۳۳۶$$

بخش ۳
ترکیب اشیاء

اگر در انتخاب تعدادی شیء از میان n شیء، ترتیبِ انتخاب مهم نباشد، به هر انتخاب یک «**ترکیب**» گوییم.

تعیین تعداد ترکیب‌ها:

ترکیب (انتخابِ گروهی):

تعداد ترکیب‌های r تایی از میان n شیء را با $C(n,r)$ یا $\binom{n}{r}$ نشان می‌دهیم که از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!\times(n-r)!}$$

توجه کنید:

در تبدیلِ (جایگشت) تعدادی شیء از میان n شیء، معمولاً ساختن **صف با ترتیب** مورد توجه است، ولی در ترکیب، ساخت **گروه** یا **زیرمجموعه** از میان کل اشیاء، **یعنی بدون ترتیب** مورد نظر است.

نتیجه:

تعداد زیر مجموعه‌های r عضوی از یک مجموعه‌ی n عضوی برابر $\frac{n!}{r!\times(n-r)!}$ است.

مثال: (نهایی- خرداد ۱۳۹۹)

مجموعه‌ی هشت عضوی $\{۱,۲,۳,\dots,۸\}$ چند زیر مجموعه‌ی سه عضوی دارد؟

پاسخ

طبق مطلب بالا:

$$\binom{۸}{۳}=\frac{۸!}{۳!\times(۸-۳)!}=\frac{۸\times۷\times۶\times۵!}{۳\times۲\times۱\times۵!}=۸\times۷=۵۶$$

مثال: به چند طریق می‌توان از بین ۱۰ نفر، یک تیم فوتبال ۷ نفره تشکیل داد؟

پاسخ

در تیم، ترتیب اهمیت نداشته و بنابراین ترکیب به کار می‌رود:

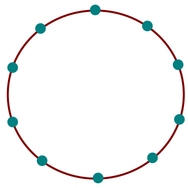
$$\binom{۱۰}{۷}=\frac{۱۰!}{۷!\times\underbrace{(۱۰-۷)!}_{=۳!}}=\frac{۱۰\times۹\times۸\times۷!}{۷!\times۱\times۲\times۳}=۱۰\times۳\times۴=۱۲۰$$

0916 992 5753
farhad.shabani66

مثال: روی محیط یک دایره طبق شکل زیر ۱۰ نقطه قرار دارد.

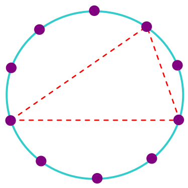
الف) چند مثلث با رأس‌های از این نقاط می‌توان ساخت؟

ب) با این نقاط، چند وتر در دایره تشکیل می‌شود؟ (مشابه نهایی – خرداد ۹۹)



پاسخ

الف) هر سه نقطه‌ای که انتخاب کنید، دقیقاً یک مثلث ساخته می‌شود، مانند:



پس تعداد مثلث‌ها برابر تعداد انتخاب‌های سه نقطه از بین ده نقطه است:

$$\binom{۱۰}{۳}=\frac{۱۰!}{۳!\times(۱۰-۳)!}=\frac{۱۰\times۹\times۸\times۷!}{۳\times۲\times۱\times۷!}=۱۰\times۳\times۴=۱۲۰$$

ب) به صورت مشابه، با انتخاب هر دو نقطه، دقیقاً یک وتر خواهیم داشت:

$$\binom{۱۰}{۲}=\frac{۱۰!}{۲!\times(۱۰-۲)!}=\frac{۱۰!}{۲!\times۸!}=\frac{۱۰\times۹\times۸!}{۲\times۸!}=۵\times۹=۴۵$$

به روش‌های محاسبه‌ی سریع ترکیب‌های پرکاربرد توجه کنید:

محاسبات سریع:

موارد زیر برای هر عدد طبیعی n برقرار بوده و در محاسبات بسیار مورد استفاده واقع می‌شوند:

- همواره داریم: $\binom{n}{۰}=۱$. برای نمونه؛

$$\binom{۵}{۰}=۱ \quad و \quad \binom{۳}{۰}=۱$$

- همواره داریم $\binom{n}{۱}=n$. برای نمونه؛

$$\binom{۵}{۱}=۵$$

- رابطه‌ی $\binom{n}{۲}=\frac{n\times(n-۱)}{۱\times۲}$ یا به طور ساده $\binom{n}{۲}=\frac{n(n-۱)}{۲}$ کاربرد زیادی دارد. نمونه‌ها:

$$\binom{۸}{۲}=\frac{۸\times(۸-۱)}{۲}=۲۸ \quad و \quad \binom{۵}{۲}=\frac{۵\times(۵-۱)}{۲}=۱۰$$

- نظم بالا را می‌توان برای تعداد ترکیب‌های دیگر هم بکار برد. نمونه‌ها:

$$\binom{8}{4}=\frac{8\times7\times6\times5}{1\times2\times3\times4}=70 \quad \text{و} \quad \binom{6}{3}=\frac{6\times5\times4}{1\times2\times3}=20$$

(توجه: در محاسبه $\binom{n}{r}$ به تعداد r و طبق نظم بالا، در صورت و مخرج ضرب بنویسید.)

بعلاوه:

در عبارت $\binom{n}{r}$ می‌توانید جای r، اختلاف دو عدد، یعنی: $n-r$ را جایگزین کنید؛ کاربرد مناسب این خاصیت، باعث سرعت بیشتر محاسبات می‌شود:

$$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$$

برای نمونه؛

به جای محاسبه‌ی $\binom{6}{4}$، حاصل $\binom{6}{2}=\binom{6}{6-4}$ را حساب می‌کنیم که راه کوتاه دارد. نمونه‌های دیگر:

$$\binom{7}{5}=\binom{7}{2}=\frac{7\times6}{2}=21 \quad \text{و} \quad \binom{6}{5}=\binom{6}{1}=6$$

مثال: (نهایی- خرداد ۱۳۹۹)

به چند طریق می‌توان سه توپ همرنگ را از بین ۵ توپ قرمز و ۴ توپ آبی انتخاب کرد؟

پاسخ

باید هر سه قرمز یا هر سه آبی باشند:

$$\binom{5}{3}+\binom{4}{3}=\binom{5}{2}+\binom{4}{1}=\frac{5\times4}{2}+4=10+4=14$$

مثال: به چند طریق می‌توان از بین پنج مرد و چهار زن، ۶ نفر انتخاب کرد به‌طوری که:

الف) ۴ مرد و ۲ زن انتخاب شوند؟

ب) لااقل ۳ زن انتخاب شوند؟

پاسخ

الف) طبق اصل ضرب:

$$\binom{5}{4}\times\binom{4}{2}=\binom{5}{1}\times\binom{4}{2}=5+\frac{4\times3}{2}=5+6=11$$

ب) توجه کنید که «لااقل سه نفر زن» یعنی: «سه نفر زن» یا «چهار نفر زن» انتخاب شوند.

بعلاوه:

چون باید شش نفر انتخاب شوند، وقتی سه یا چهار زن انتخاب می‌شوند، بقیه (تا ۶ نفر) باید از مردها انتخاب شوند:

$$\underbrace{\binom{4}{3}}_{=\binom{4}{1}}\times\underbrace{\binom{5}{3}}_{=\binom{5}{2}}+\underbrace{\binom{4}{4}}_{=\binom{4}{0}}\times\binom{5}{2}=4\times\frac{5\times4}{2}+1\times\frac{5\times4}{2}=4\times10+1\times10=50$$

مثال: ۹ گردشگر به چند روش می‌توانند در سه چادر ۳، ۴ و ۲ نفره استراحت کنند؟

پاسخ

باید ۳ نفر انتخاب شود و در اولین چادر قرار گرفته، ۴ نفر از بین شش نفر باقی‌مانده در چادر دوم و دو نفر آخر هم در چادر سوم استراحت کنند. طبق اصل ضرب:

$$\binom{9}{3}\times\underbrace{\binom{6}{4}}_{=\binom{6}{2}}\times\binom{2}{2}=\frac{9\times8\times7}{2\times3}\times\frac{6\times5}{2}\times1=84\times15=1260$$

ویژه آمادگی کنکور

در بخش پایانی، مطالب لازم جهت آمادگی کامل برای شرکت در آزمون‌ها و کنکور سراسری آورده می‌شوند.

اگر در حال مطالعه برای تسلط بر کتاب و شرکت
در امتحان مدرسه یا امتحان نهایی هستید، می‌توانید فعلاً از خواندن این بخش صرف‌نظر کنید!

با چند نمونه از کاربرد اصل‌های شمارش و جایگشت شروع می‌کنیم.

با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد چهار رقمی بخش‌پذیر بر ۵، بدون تکرار رقم‌ها می‌توان نوشت؟ (کنکور ۱۳۹۸)

1) ۷۲ 2) ۹۶ 3) ۱۰۸ 4) ۱۲۰

گزینه ۳

دو حالت ممکن را باید در نظر گرفت:

- رقم ۰ در یکان باشد:
- رقم ۵ در یکان باشد:

$$\underline{5}\times\underline{4}\times\underline{3}\times\underline{1}=60$$
$$\underline{4}\times\underline{4}\times\underline{3}\times\underline{1}=48$$

تعداد کل طبق اصل جمع:

$$60+48=108$$

در یک اتومبیل معمولی، پنج نفر به چند طریق می‌توانند بنشینند به طوری که ۳ نفر آن‌ها، مجاز به رانندگی باشند؟ (کنکور ۱۳۹۹)

1) ۷۲ 2) ۷۵ 3) ۸۴ 4) ۶۰

گزینه ۱

اگر در زیر، جایگاه سمت چپ مربوط به راننده باشد، ۳ حالت دارد. ۴ جایگاه دیگر برای سایرین مجاز بوده، فقط تکرار غیر ممکن است:

$$\underline{3}\times\underline{4}\times\underline{3}\times\underline{2}\times\underline{1}=72$$

تکنیک پاسخ‌گویی به سؤال بعد را در ذهن نگه دارید!

با ارقام ۷، ۶، ۹، ۱ و ۵ چند عدد چهار رقمی می‌توان نوشت به طوری که در همه‌ی آن‌ها، رقم یکان کوچک‌تر از رقم هزارگان باشد؟ **(بدون تکرار ارقام)**

1) ۶۰ 2) ۷۲ 3) ۶۴ 4) ۱۲۰

گزینه ۱

0916 992 5753
farhad.shabani66

تعداد کل چهار رقمی‌های ممکن $5\times4\times3\times2=120$ است. توجه کنید:

چون شرایط کاربرد ارقام در یکان و هزارگان یکسان است،

در نیمی از کل حالات، یکان از هزارگان کوچک‌تر است و در نیم دیگر حالات، یکان از هزارگان بزرگ‌تر خواهد بود. جواب:

$$120\div2=60$$

نمونه تست‌های مفیدی از بخش ترکیب ببینید:

به چند روش می‌توان از بین شش دانش‌آموز دهم و هفت دانش‌آموز یازدهم، یک تیم ۶ نفره‌ی والیبال تشکیل دهیم، به طوری که لااقل چهار نفر از پایه‌ی یازدهم باشند؟

❶ ۶۵۸ ❷ ۶۵۱ ❸ ۵۳۲ ❹ ۵۲۵

گزینه ۱

سه حالت مورد قبول است:

«۴ نفر یازدهم و ۲ نفر دهم» یا «۵ نفر یازدهم و ۱ نفر دهم» یا «هر ۶ نفر یازدهم»

طبق اصل‌های جمع و ضرب:

$$\underbrace{\binom{7}{4}}_{=\binom{7}{3}}\times\binom{6}{2}+\underbrace{\binom{7}{5}}_{=\binom{7}{2}}\times\binom{6}{1}+\underbrace{\binom{7}{6}}_{=\binom{7}{1}}\times\binom{6}{0}=\frac{7\times6\times5}{1\times2\times3}\times\frac{6\times5}{2}+\frac{7\times6}{2}\times6+7\times1=35\times15+21\times6+7$$

$$=525+126+7=658$$

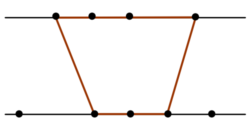
دو خط موازی در نظر گرفته، روی یک خط ۵ نقطه و روی خط دیگر ۴ نقطه قرار دهید. توسط این نقاط چند چهار ضلعی تشکیل می‌شود؟

❶ ۵۰ ❷ ۵۵ ❸ ۶۰ ❹ ۵۶

گزینه ۳

برای تشکیل چهارضلعی، باید چهار نقطه انتخاب کنیم. تنها یک حالت وجود دارد که دو نقطه از یک خط و دو نقطه از خط دیگر انتخاب شوند. بنابراین طبق اصل ضرب:

$$\binom{4}{2}\times\binom{5}{2}=6\times10=60$$



دو خط موازی در نظر گرفته، روی یک خط ۵ نقطه و روی خط دیگر ۴ نقطه قرار دهید. تعداد مثلث‌ها با رئوس از این نقاط کدام است؟

❶ ۵۰ ❷ ۶۵ ❸ ۶۰ ❹ ۷۰

0916 992 5753 farhad.shabani66