

به نام خدا

# غنی سازی ریاضی ششم ابتدایی

فرا تراز برنامه درسی استاندارد

مؤلف :

فاطمه سادات جنید

انتشارات ارسطو

(سازمان چاپ و نشر ایران - ۱۴۰۲)

نسخه الکترونیکی این اثر در سایت سازمان چاپ و نشر ایران و اپلیکیشن کتاب رسان موجود می باشد

chaponashr.ir

سرشناسه : جنید، فاطمه سادات، ۱۳۷۸-  
عنوان و نام پدیدآور : غنی سازی ریاضی ششم ابتدایی: فراتر از برنامه درسی استاندارد /  
مؤلف فاطمه سادات جنید.  
مشخصات نشر : ارسطو ( سامانه اطلاع رسانی چاپ و نشر ایران ) ، ۱۴۰۲.  
مشخصات ظاهری : ۱۳۲ ص.  
شابک : ۹۷۸-۶۲۲-۳۳۹۳-۷۸-۵  
وضعیت فهرست نویسی : فیبا مختصر  
شماره کتابشناسی ملی : ۹۴۱۱۲۹۲  
اطلاعات رکورد کتابشناسی : فیبا

نام کتاب : غنی سازی ریاضی ششم ابتدایی، فراتر از برنامه درسی استاندارد  
مؤلف : فاطمه سادات جنید  
ناشر : ارسطو ( سامانه اطلاع رسانی چاپ و نشر ایران )  
صفحه آرای، تنظیم و طرح جلد: پروانه مهاجر  
تیراژ : ۱۰۰۰ جلد  
نوبت چاپ : اول - ۱۴۰۲  
چاپ : زیرجد  
قیمت : ۱۰۶۰۰۰ تومان  
فروش نسخه الکترونیکی - کتاب رسان :  
<https://chaponashr.ir/ketabresan>  
شابک : ۹۷۸-۶۲۲-۳۳۹-۳۷۸-۵  
تلفن مرکز پخش : ۰۹۱۲۰۲۳۹۲۵۵  
[www.chaponashr.ir](http://www.chaponashr.ir)



## فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۷	مقدمه.....
۹	فصل اول.....
۹	کاوش اعداد و معماهای آن‌ها.....
۹	۱.۱ زیبایی اعداد اول.....
۱۱	۱.۲ دنباله فیبوناچی و نسبت طلایی.....
۱۴	۱.۳ مربع‌های جادویی مرموز.....
۱۷	۱.۴ سرگرمی با فاکتوریل.....
۱۹	۱.۵ الگوهای اعداد و پیش بینی ها.....
۲۱	۱.۶ پالیندروم و اسرار آنها.....
۲۳	۱.۷ کاوش کسری های ادامه دار.....
۲۷	فصل دوم.....
۲۷	هندسه: اشکال و شگفتی‌های آن‌ها.....
۲۷	۲.۱ تسلیت: هنر تکرار الگوها.....
۲۹	۲.۲ دنیای فراکتال ها.....
۳۲	۲.۳ شناخت اجسام افلاطونی.....
۳۴	۲.۴ بررسی مارپیچ ها در طبیعت.....
۳۷	۲.۵ قدرت فیثاغورث: فراتر از قضیه.....
۳۹	۲.۶ هندسه اوریگامی.....

۴۲	..... کاوش در هندسه های غیر اقلیدسی
۴۵	..... فصل سوم
۴۵	..... بینش جبری
۴۵	..... ۳.۱ متغیرها و الگوهای گیج کننده
۴۷	..... ۳.۲ مقدمه ای بر دنباله ها و سری ها
۴۹	..... ۳.۳ عبارات جبری در زندگی روزمره
۵۱	..... ۳.۴ معادلات عملی و اعمال متعادل
۵۲	..... ۳.۵ توان نماها و لگاریتم ها
۵۴	..... ۳.۶ بررسی نابرابری ها از طریق نمودارها
۵۶	..... ۳.۷ دنیای چندجمله ای ها
۵۹	..... فصل چهارم
۵۹	..... ماجراجویی در احتمالات و آمار
۵۹	..... ۴.۱ شهود پشت احتمال
۶۱	..... ۴.۲ پیش بینی نتایج با ترکیبات
۶۳	..... ۴.۳ کاوش میانگین ها: میانگین، میانه، مد
۶۵	..... ۴.۴ قدرت نمودارها و نمایش داده ها
۶۷	..... ۴.۵ درک تغییرپذیری: مقدمه ای بر انحراف معیار
۶۸	..... ۴.۶ شبیه سازی تصادفی: آزمایش های عملی
۷۱	..... ۴.۷ بررسی سوگیری و آمارهای گمراه کننده
۷۵	..... فصل پنجم
۷۵	..... ریاضیات در طبیعت و دنیای فیزیکی

۷۵.....	۵.۱ تقارن در گیاهان و جانوران.....
۷۷.....	۵.۲ بررسی الگوهای ریاضی در منظومه شمسی.....
۷۹.....	۵.۳ ریاضیات صدا و امواج.....
۸۱.....	۵.۴ هندسه طبیعت: کریستال ها و دانه های برف.....
۸۳.....	۵.۵ ریاضی پشت الگوهای آب و هوا.....
۸۵.....	۵.۶ بررسی رشد: حسابی در مقابل هندسی.....
۸۷.....	۵.۷ درک حرکت از طریق نمودارها.....
۹۱.....	<b>فصل ششم.....</b>
۹۱.....	<b>استدلال منطقی و معماها.....</b>
۹۱.....	۶.۱ مقدمه ای بر معماهای منطقی.....
۹۳.....	۶.۲ سودوکو و جدول کلمات متقاطع.....
۹۵.....	۶.۳ کشف معماهای ریاضی.....
۹۷.....	۶.۴ لذت بازی های ریاضی.....
۱۰۰.....	۶.۵ استراتژی برای حل بازی های فکری.....
۱۰۲.....	۶.۶ ریاضی پشت توهمات نوری.....
۱۰۴.....	۶.۷ استراتژی های بازی های تخته ای پیشرفته.....
۱۰۷.....	<b>فصل هفتم.....</b>
۱۰۷.....	<b>کاربرد ریاضیات در سناریوهای زندگی واقعی.....</b>
۱۰۷.....	۷.۱ بودجه و مدیریت پول: یک کاربرد عملی.....
۱۰۹.....	۷.۲ ریاضیات مدیریت زمان.....

- ۷.۳ مقیاس بندی و تناسب در پخت و پز و پخت ..... ۱۱۱
- ۷.۴ ریاضیات در معماری: از اهرام تا آسمان خراش ها ..... ۱۱۳
- ۷.۵ ریاضیات در سفر: نقشه ها، فاصله و زمان ..... ۱۱۵
- نقشه ها و پیش بینی های ریاضی ..... ۱۱۵
- محاسبات فاصله و هندسه ..... ۱۱۵
- تخمین زمان و جبر ..... ۱۱۶
- مشارکت های ایران و ریاضیات سفر ..... ۱۱۶
- ۷.۶ بررسی نسبت ها در هنر و طراحی ..... ۱۱۷
- ۷.۷ ریاضیات در پس زندگی پایدار ..... ۱۱۸
- منابع ..... ۱۲۱

## مقدمه

ریاضیات، زبان جهانی منطق و استدلال، جایگاه فوق‌العاده‌ای در تابلوی دانش بشری دارد. اصول آن بر همه چیز حاکم است، از ریتم کیهان گرفته تا الگوهای روی صدف دریایی. همانطور که ذهن‌های جوان سفر تحصیلی خود را آغاز می‌کنند، ضروری است که آنها نه تنها مفاهیم اساسی ریاضی را درک کنند، بلکه زیبایی، عمق و کاربردی بودن موضوع را نیز درک کنند. این درک می‌تواند اشتیاق به یادگیری را برانگیزد و درهایی را به روی فرصت‌های بی‌شماری در آینده باز کند.

در چارچوب سنتی آکادمیک، برنامه درسی اغلب یک پیشرفت خطی و ساختار یافته از موضوعات را با هدف تجهیز دانش‌آموزان به مهارت‌ها و دانش ضروری ارائه می‌دهد. با این حال، مانند هر رشته دیگری، قلمرو ریاضیات بسیار فراتر از آن چیزی است که به طور معمول در کلاس‌های درس تدریس می‌شود. فراتر از فرمول‌ها و قضایای استاندارد، جهان وسیعی از ایده‌ها وجود دارد که در انتظار کاوش هستند.

"غنی‌سازی ریاضی پایه ششم، فراتر از برنامه درسی استاندارد" تلاشی برای پر کردن شکاف بین معمول و فوق‌العاده است. این کتاب که برای دانش‌آموزان کلاس ششم طراحی شده است، به حوزه‌هایی از ریاضیات می‌پردازد که هم چالش‌برانگیز و هم جذاب هستند و مرزهای آنچه را که معمولاً در این سطح از کلاس انتظار می‌رود پیش می‌برد. هدف ما صرفاً تکمیل برنامه درسی استاندارد نیست، بلکه ارتقای تجربه یادگیری، تشویق دانش‌آموزان به تفکر انتقادی، کاوش عمیق و قدردانی از جنبه‌های مختلف ریاضیات است.

محتوای این کتاب هم از مفاهیم جهانی ریاضی و هم از سنت غنی اکتشاف ریاضی در ایران الهام گرفته شده است. ما با استفاده از طیف گسترده‌ای از منابع، سختگیری

تحقیقات ریاضی را با شگفتی کشف ریاضی ادغام می کنیم. با انجام این کار، ما امیدواریم که به دانش آموزان درک جامعی از موضوع ارائه دهیم، که بین کسب مهارت و پرورش کنجکاوی تعادل برقرار می کند.

در دنیایی که به سرعت در حال تحول است، جایی که حل مسئله، تفکر منطقی، و مهارت های تحلیلی در درجه اول اهمیت قرار دارند، یک پایه ریاضی قوی ضروری است. اما فراتر از ارزش سودمند آن، ریاضیات دیدگاهی منحصر به فرد به جهان ارائه می دهد، چشم اندازی منظم و در عین حال بی نهایت، دقیق و در عین حال مرموز. از طریق این کتاب، ما آرزو داریم که نه تنها شایستگی، بلکه قدردانی عمیقی از هنر و علم ریاضیات را در دانش آموزان ایجاد کنیم.

به عنوان مربیان، والدین یا صرفاً به عنوان یادگیرندگان مادام العمر، مأموریت ما روشن کردن جرقه کنجکاوی در ذهن جوانان است. به آنها نشان دهیم که هر مفهوم ریاضی، مهم نیست چقدر پیچیده است، قابل درک، کاوش و حتی لذت بردن است. این کتاب گامی در این مسیر است و ما از شما دعوت می کنیم که این سفر پربار را با ما آغاز کنید.

## فصل اول

# کاوش اعداد و معماهای آنها

### ۱.۱ زیبایی اعداد اول

در دنیای متنوع اعداد، اعداد اول به طور مداوم به عنوان یک مقوله منحصر به فرد برجسته شده اند و شیفتگی ریاضیدانان، مربیان و دانش آموزان را به خود جلب می کنند. تعریف ساده آنها فریبنده است، زیرا در درون آن مجموعه ای غنی از الگوها، اسرار و سؤالات حل نشده نهفته است که دانشمندان را برای هزاران سال درگیر خود نگه داشته است.

اعداد اول اعداد صحیح بزرگتر از ۱ هستند که مقسوم علیه دیگری جز ۱ و خودشان ندارند. در نگاه اول، این تعریف ساده به نظر می رسد. با این حال، این دسته از اعداد جزء لاینفک بسیاری از حوزه های ریاضیات، از نظریه اعداد تا کاربردهای مدرن در علوم کامپیوتر است.

از لحاظ تاریخی، اهمیت اعداد اول دیرینه است. تمدن های باستانی، از یونانی ها تا چینی ها، اعداد اول را شناسایی کرده و در مورد آنها فکر کرده بودند. اقلیدس، ریاضیدان یونانی، از پیشگامان مطالعه این اعداد بود. اقلیدس در کار بزرگ خود، "عناصر" پیشنهاد کرد که بی نهایت اعداد اول وجود دارد، یک مفهوم انقلابی در آن زمان. با در نظر گرفتن حاصلضرب همه اعداد اول شناخته شده و اضافه کردن یک، او نشان داد که یا این عدد جدید اول است یا عوامل آن اعداد اولی هستند که قبلاً در نظر گرفته نشده بودند.

به سرعت در قرن هفدهم و هجدهم، مطالعه اعداد اول دستخوش پیشرفت های قابل توجهی شد. ریاضیدانان برجسته، مانند پیر دو فرما و لئونارد اویلر، کمک های اساسی کردند. به عنوان مثال، فرما کلاس خاصی از اعداد اول را که اکنون به عنوان اعم از فرما شناخته می شود، با استفاده از فرمول  $2^{2^n} + 1$  توصیف کرد.

علاوه بر این، مفهوم اعداد اول دوقلو، جفت های اعداد اول که با ۲ از هم جدا شده اند، توجه زیادی را برانگیخت. در حالی که اعداد اول دوقلو متعددی مانند (۳،۵)، (۱۱،۱۳)، و (۱۷،۱۹) شناخته شده اند، این یک سوال حل نشده باقی می ماند که آیا تعداد بی نهایت جفت اول دوقلو وجود دارد یا خیر.

فراتر از این الگوها، توزیع اعداد اول، به ویژه با بزرگتر شدن اعداد، یکی از بزرگترین معماها در ریاضیات باقی مانده است. قضیه اعداد اول که در قرن نوزدهم ایجاد شد، بینش هایی را در مورد این توزیع ارائه می دهد. این نشان می دهد که چگالی اعداد اول در اطراف یک عدد بزرگ  $n$  تقریباً  $1/\ln(n)$  است، که در آن  $\ln(n)$  لگاریتم طبیعی  $n$  است.

اعداد اول فقط موجودات ریاضی انتزاعی نیستند. ویژگی های آنها باعث می شود در کاربردهای دنیای واقعی ارزشمند باشند. یکی از مهمترین کاربردها در حوزه رمزنگاری است. الگوریتم RSA، یک سیستم رمزنگاری با کلید عمومی، از دشواری فاکتورگیری حاصل ضرب دو عدد اول بزرگ استفاده می کند. این زیربنای بسیاری از امنیت دیجیتال مدرن است و تضمین می کند که معاملات و ارتباطات آنلاین محرمانه باقی می مانند.

در محیط کلاس درس، اول ها ابزار ارزشمندی را برای القای حس شگفتی و کنجکاوی در دانش آموزان به مریبان ارائه می دهند. کاوش اعداد اول می تواند یک فعالیت عملی باشد، جایی که دانش آموزان می توانند با استفاده از تکنیک هایی مانند غربال اراتوستن، اعداد را برای شناسایی اعداد اول غربال کنند. چنین تمرین هایی نه تنها درک را تقویت می کنند، بلکه مهارت های تحلیلی را نیز توسعه می دهند.

غنای فرهنگی ایران لایه ای دیگر به تابلوی اعداد اول می افزاید. از نظر تاریخی، ریاضیدانان ایرانی مانند الخوارزمی و عمر خیام به ترتیب سهم قابل توجهی در جبر و قضیه دو جمله ای داشته اند. در حالی که آثار مستقیم روی اعداد اول از ایران باستان ممکن است پراکنده باشد، سنت ریاضی که توسط چنین محققانی وضع شده است راه را برای نسل های بعدی هموار کرد.

ریاضیدانان معاصر ایرانی همچنان به این رشته کمک می کنند. تحقیقات در مورد خواص اعداد اول، الگوهای آنها و توزیع آنها ادامه دارد. در روحیه مشترک جهانی ریاضیات، یافته های محققان ایرانی درک جهانی اعداد اول را تقویت می کند.

در پایان، اعداد اول، با سادگی و عمق جذاب خود، بدون شک موضوع تحقیق، بحث و آموزش باقی خواهند ماند. آنها شکاف بین دنیای انتزاعی ریاضیات و کاربردهای ملموس آن در دنیای واقعی را پر می کنند. به عنوان مربیان، دانش آموزان و محققین، سفر در دنیای اعداد اول، فرصت های بی پایانی، چالش ها و نوید کشف را ارائه می دهد.

## ۱.۲ دنباله فیبوناچی و نسبت طلایی

اعداد همیشه دارای رمز و رازهایی بوده اند که هم ریاضیدانان و هم افراد غیر روحانی را به طور یکسان الهام می بخشد. در میان این دنباله های معمایی، سری فیبوناچی و نسبت طلایی مرتبط با آن برجسته می شوند که نه تنها در ریاضیات محض، بلکه در طبیعت، معماری، هنر و حتی تئوری های بورس نیز طنین انداز می شوند. تاریخچه درهم تنیده و ویژگی های دنباله فیبوناچی و نسبت طلایی آنها را به موضوعات جذابی برای مطالعه و کاربرد تبدیل می کند.

دنباله فیبوناچی با دو عدد ۰ و ۱ شروع می شود. هر عدد بعدی مجموع دو عدد قبلی است. از این رو، دنباله به صورت ۰، ۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳ و غیره شروع می شود. لئوناردو ریاضیدان ایتالیایی از پیزا، معروف به فیبوناچی، این دنباله را در کتاب خود

«کتاب چرتکه»<sup>۱</sup> در سال ۱۲۰۲ معرفی کرد. با این حال، در حالی که فیبوناچی این دنباله را به ریاضیات غربی آورد، خواص آن در هند خیلی زودتر شناخته شده بود. یکی از ویژگی‌های جالب اعداد فیبوناچی، الگویی است که هنگام تقسیم یک عدد بر اعداد قبلی ایجاد می‌کنند. همانطور که اعداد در دنباله بزرگتر می‌شوند، این ضریب به یک مقدار ثابت نزدیک می‌شود: تقریباً  $1.61803398875$ . این عدد غیرمنطقی که به نسبت طلایی معروف است (اغلب با حرف یونانی  $\phi$  یا فی نشان داده می‌شود) هزاران سال متفکران را مجذوب خود کرده است.

اما چه چیزی نسبت طلایی را تا این حد فریبنده می‌کند؟ فراتر از ویژگی‌های ریاضی آن، جلوه‌های آن در زمینه‌های مختلف شگفت‌انگیز است. در طبیعت، نسبت طلایی اغلب ظاهر می‌شود. برای مثال، چیدمان برگ‌ها بر روی گیاهان یا مارپیچ‌های دانه‌های آفتابگردان اغلب از دنباله فیبوناچی پیروی می‌کنند که به کارآمدترین بسته‌بندی و قرار گرفتن در معرض نور خورشید بهینه می‌شود. علاوه بر این، نحوه توزیع گلبرگ‌ها در گل‌ها، رشد مارپیچی کاج‌ها و شاخه‌های درختان نیز الگوهایی را نشان می‌دهد که می‌تواند به این دنباله معروف مرتبط باشد.

در هنر و معماری، نسبت طلایی به عنوان نمایانگر کمال زیبایی شناختی مطرح شده است. چه پارتنون در آتن باشد، چه اهرام مصر، یا حتی قطعاتی از هنر رنسانس، بسیاری بر این باورند که سازه‌ها و آثار هنری دارای نسبت طلایی زیبایی ذاتی دارند. آثار لئوناردو داوینچی، مانند مونالیزا و مرد ویترویی، اغلب به عنوان نمونه‌هایی ذکر می‌شوند که ظاهراً از نسبت طلایی استفاده شده است، که منعکس‌کننده نسبت‌هایی است که به طور طبیعی برای چشم انسان خوشایند است.

موسیقی از جادوی فیبوناچی و نسبت طلایی دست نخورده نیست. بسیاری از آهنگسازان از دنباله فیبوناچی برای تعیین طول عبارات در ساخته‌های خود استفاده کرده‌اند و معتقدند که این دنباله از نظر زیبایی شناختی و صدای طبیعی موسیقی بیشتری ایجاد

می‌کند. «موسیقی برای سازهای زهی، کوبه ای و سلستا»<sup>۱</sup> بلا بارتوک یک نمونه قابل توجه است.

در عصر مدرن، دنباله فیبوناچی حتی در علم اقتصاد نیز کاربرد پیدا کرده است. برخی از تحلیلگران بازار سهام از سطوح اصلاحی فیبوناچی برای پیش بینی تغییرات احتمالی قیمت در بازار استفاده می‌کنند. این رویکرد، اگرچه به طور جهانی پذیرفته نشده است، اما بر تأثیر گسترده دنباله فیبوناچی تأکید می‌کند.

زیبایی ذاتی دنباله فیبوناچی و نسبت طلایی در همه جا بودن آنها نهفته است. آنها دنیای ریاضیات انتزاعی را با تجربیات ملموس و روزمره، از گلبرگ های گل گرفته تا شگفتی های معماری به یاد ماندنی، پیوند می‌دهند. اصل اساسی که آنها در بر می‌گیرند، رشد، هماهنگی و تناسب است.

از منظر آموزشی، دنباله فیبوناچی و نسبت طلایی ارزش بسیار زیادی ارائه می‌دهند. آنها یک مثال عینی از چگونگی تجلی ریاضیات ناب در زمینه های مختلف ارائه می‌دهند. در کلاس درس، این می‌تواند یک مفهوم الهام بخش باشد و به دانش آموزان نشان دهد که ریاضیات محدود به کتاب های درسی نیست. در اطراف ما رشد می‌کند.

ایران با ملیله‌های غنی تاریخی و فرهنگی‌اش، نمونه‌هایی هم دارد که نسبت طلایی را می‌توان تشخیص داد. معماری اسلامی و آثار هنری ایرانی الگوها و تناسبات هندسی را به نمایش می‌گذارند که با نسبت طلایی طنین‌انداز می‌شود. تحقیقات محققان ایرانی به بررسی خواص، کاربردها و مفاهیم تاریخی دنباله فیبوناچی در زمینه میراث فارسی ادامه می‌دهد.

در نتیجه، دنباله فیبوناچی و نسبت طلایی، با مفاهیم چند وجهی خود، بیش از مفاهیم ریاضی هستند. آنها هارمونی را نشان می‌دهند که در هنر، طبیعت، معماری، موسیقی و

حتی اقتصاد نفوذ می کند. برای هر کسی که به دنیای ریاضیات جسارت می کند، آنها به عنوان شاهی بر زیبایی این رشته و ارتباط عمیق آن با جهان هستند.

### ۱.۳ مربع‌های جادویی مرموز

مربع‌های جادویی یکی از جذاب‌ترین ساختارهای ریاضی هستند که برای قرن‌ها هم علاقه‌مندان آماتور و هم ریاضیدانان حرفه‌ای را مجذوب خود می‌کنند. جذابیت زیبایی‌شناختی ذاتی آنها همراه با ویژگی‌های عمیق ریاضی، آنها را در فرهنگ‌ها و دوره‌های مختلف مورد مطالعه قرار داده است.

مربع جادویی را می‌توان به عنوان شبکه‌ای از اعداد متمایز تعریف کرد که در آن مجموع اعداد در هر سطر، هر ستون و هر دو مورب اصلی یکسان هستند. ثابت جادویی یا مجموع اعداد در هر سطر، ستون یا مورب به مربع خاصیت «جادویی» متمایز خود را می‌دهد.

منشاء مربع‌های جادویی را می‌توان به چین باستان ردیابی کرد و میدان «لو شو» یکی از اولین میدان‌های جادویی شناخته شده است. اعتقاد بر این بود که این شبکه  $3 \times 3$ ، مرتبط با اساطیر چینی، دارای خواص عرفانی است. مجموع ثابت اعداد، در این مورد، ۱۵ بود، عددی که در زمینه‌های مختلف فرهنگی دارای اهمیت است.

فرهنگ‌های مختلف در هنر و علم مربع‌های جادویی نقش بسته‌اند. در جهان اسلام، مربع‌های جادویی در طرح‌های معماری گنجانده شد که نشان‌دهنده قدرت ریاضی آن دوران بود. ریاضیدانان پارسی مانند البونی کمک‌های قابل توجهی به مطالعه مربع‌های جادویی کردند و درهم آمیختگی غنی از ریاضیات و هنر را در عصر طلایی اسلامی به نمایش گذاشتند.

هند نیز تلاش خود را با مربع های جادویی انجام داده است. تیروواللووار<sup>۱</sup> شاعر و نمایشنامه نویس مشهور سانسکریت مربع جادویی را در آثار خود گنجانده است که بر وسعت جذابیت آن تأکید می کند.

با افزایش اندازه شبکه، پیچیدگی و امکانات مربع های جادویی به طور تصاعدی افزایش می یابد. در حالی که مربع های  $3 \times 3$  ساختار نسبتاً مستقیمی دارند، مربع های  $4 \times 4$  مجموعه ای از پیکربندی ها را ارائه می دهند. و همانطور که به شبکه های  $5 \times 5$ ،  $6 \times 6$  و بزرگ تر می رویم، تغییرات تقریباً بی پایان است و ریاضی دانان را برای ابداع الگوریتم ها و روش هایی برای ساخت آنها به چالش می کشد.

یکی از چشمگیرترین ویژگی های مربع های جادویی تطبیق پذیری آنهاست. فراتر از مربع های اصلی جادویی، مربع های پان ماژیک، دو جادویی و سه جادویی وجود دارد که هر کدام لایه دیگری از پیچیدگی و شگفتی را اضافه می کنند. به عنوان مثال، مربع های پان جادویی، حتی اگر بچرخند یا منعکس شوند، خاصیت «جادویی» خود را حفظ می کنند، که بر جذابیت متقارن آنها تأکید می کند.

مربع های جادویی کاربردهایی فراتر از فعالیت های هنری یا تفریحی صرف پیدا می کنند. در ترکیبات مدرن، آنها به عنوان پازل های پیچیده، الگوریتم های محاسباتی چالش برانگیز عمل می کنند. زمینه تحقیق در عملیات، که در مسائل تصمیم گیری و بهینه سازی حیاتی است، مربع های جادویی را به عنوان موارد آزمایشی روشن گری می بیند.

جامعه ریاضی به طور مداوم تقاطع هایی با مربع های جادویی پیدا کرده است. به عنوان مثال، لئونارد اویلر، ریاضیدان مشهور، گونه ای به نام «دایره جادویی» را بررسی کرد. به طور مشابه، بنجامین فرانکلین، اگرچه بیشتر به خاطر تلاش های سیاسی و علمی اش شناخته می شود، اما علاقه شدیدی به مربع های جادویی داشت و یک مربع چشمگیر  $8 \times 8$  ابداع کرد که توجه ریاضیدانان زمان خود را به خود جلب کرد.

معمای مربع های جادویی فقط به ساخت آنها محدود نمی شود، بلکه به ویژگی های آنها نیز گسترش می یابد. ویژگی های طیفی، تفاسیر جبری خطی و جنبه های نظری اعداد این مربع ها، همگی حوزه های اکتشاف ریاضی دقیق بوده اند. هر چه بیشتر در مورد این مربع ها کشف کنیم، سؤالات بیشتری مطرح می شود و آنها را به یک زمینه مطالعاتی در حال تکامل پیوسته تبدیل می کند.

در قلمرو آموزشی، مربع های جادویی بسیار ارزشمند هستند. آنها به عنوان ابزاری برای برانگیختن علاقه به ریاضیات، به ویژه در بین دانش آموزان جوان تر عمل می کنند. ساختن شبکه های کوچک تر، درک ویژگی های آنها و مقیاس بندی آنها به شبکه های بزرگ تر می تواند یک تجربه هیجان انگیز باشد و دانش آموزان را وادار به درک زیبایی و پیچیدگی های ریاضیات کند.

ایران، با تاریخ درخشان ریاضی خود، از جذابیت مربع های جادویی بی نصیب نمانده است. نسخه های خطی باستانی و شگفتی های معماری نشان از شیفتگی دانشمندان ایرانی به این سازه ها دارد. ریاضیدانان معاصر ایرانی به کاوش در عمق آنها ادامه می دهند و به گفتمان ریاضی جهانی کمک می کنند.

در پایان، مربع های جادویی، با ترکیبی از هنر، فرهنگ و ریاضیات، یکی از معمایی ترین و جذاب ترین ساختارهای ریاضی باقی می ماند. آنها به عنوان پل هایی عمل می کنند که دوره ها، فرهنگ ها و شاخه های ریاضی بی شمار را به هم متصل می کنند. جذابیت آنها، که با گذشت زمان کاهش نیافته است، نوید اکتشافات، اکتشافات و الهامات بیشتر را برای نسل های آینده می دهد.

## ۱.۴ سرگرمی با فاکتوریل

فاکتوریل‌ها که با علامت تعجب (!) نشان داده می‌شوند، موجودیت‌های ریاضی ضروری هستند که در زمینه‌های مختلف، از ترکیبات تا حساب دیفرانسیل و انتگرال، کاربرد پیدا می‌کنند. فاکتوریل حاصلضرب تمام اعداد صحیح مثبت تا یک عدد معین است. برای مثال فاکتوریل ۵ که به صورت  $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$  محاسبه می‌شود. اما فراتر از این تعریف اولیه، فاکتوریل‌ها در را به روی ماجراهای ریاضی، معماها و کنجکاوای‌های متعدد باز می‌کنند.

مفهوم فاکتوریل‌ها را می‌توان به تمدن‌های باستانی، از جمله ریاضی‌دانان هندی و عرب که جایگشت‌ها و ترکیب‌ها را بررسی کردند، ردیابی کرد (کاتز، وی.جی.<sup>۱</sup>، ۲۰۰۹). آنها با تعیین تعداد راه‌های چیدمان ارقام، پایه‌ای را برای آنچه امروزه به عنوان فاکتوریل می‌فهمیم، ایجاد کردند. اصطلاح «فاکتوریل» خیلی دیرتر، در قرن ۱۸، توسط کریستین کرامپ<sup>۲</sup> معرفی شد.

یکی از جنبه‌های جالب فاکتوریل‌ها رشد سریع آنهاست. فاکتوریل‌های اعداد حتی کوچک می‌توانند فوق‌العاده بزرگ باشند. به عنوان مثال:

$$10! = 3,628,800$$

این رشد تصاعدی منجر به این شده است که فاکتوریل‌ها در درک و توضیح «اعداد بزرگ»، به ویژه در ریاضیات ترکیبی، محوری باشند.

فاکتوریل‌ها نقش مهمی در ترکیبات دارند، در درجه اول در جایگشت‌ها و ترکیب‌ها. هنگام تعیین تعداد روش‌های ترتیب دادن  $n$  اشیاء به ترتیب خاص بدون تکرار، پاسخ به سادگی  $n!$  است. فاکتوریل‌ها همچنین در تعیین ترکیب‌ها، در جایی که ترتیب مهم نیست، با استفاده از فرمول ضرب دو جمله‌ای، که به صورت  $\binom{n}{k}$  نمایش داده می‌شود،

1- Katz, V.J

2 -Christian Kramp

کمک می کند. این فرمول تعداد روش های انتخاب اشیاء  $r$  را از مجموعه ای از  $n$  بدون تکرار محاسبه می کند (ایگنر، ام<sup>۱</sup>، ۲۰۰۷).

در دنیای حساب دیفرانسیل و انتگرال، فاکتوریل ها در سری تیلور ظاهر شگفت انگیزی دارند. بسط توابع سری تیلور از فاکتوریل ها برای ارائه تقریب های چند جمله ای توابع استفاده می کند. به عنوان مثال، بسط تابع نمایی  $e^x$  شامل عبارات تقسیم بر فاکتوریل می شود و اطمینان حاصل می کند که سری برای همه  $x$  همگرا می شود (استوارت، جی<sup>۲</sup>، ۲۰۰۶).

فاکتوریال ها خالی از رمز و راز نیستند. یکی از جذاب ترین مسائل مربوط به فاکتوریل ها، جستجو برای یافتن اعدادی است که دقیقاً به  $n$  صفر ختم می شوند. این کاوش عمیقاً به فاکتورسازی اولیه فاکتوریل ها و قدرت اعداد اول در آنها می پردازد.

علاوه بر این، یک تلاقی هیجان انگیز از فاکتوریل ها با اعداد اول وجود دارد. قضیه ویلسون بیان می کند که برای هر عدد اول  $p$ ، فاکتوریل  $p-1$  یک کمتر از مضرب  $p$  است (سیلورمن، جی اچ<sup>۳</sup>، ۲۰۰۹). این رابطه بیشتر بر شبکه پیچیده ای که فاکتوریل ها در حوزه های مختلف ریاضیات می بافند، تأکید می کند.

در ریاضیات تفریحی، فاکتوریل ها به عنوان بستری برای پازل ها و چالش های متعدد عمل می کنند. سوالاتی مانند «در پایان ۱۰۰ چند صفر است!» یا «آخرین رقم غیر صفر سال ۲۰۱۰ چیست!» کنجکاوی را غلغلک دهید و مهارت های حل مسئله علاقه مندان را به چالش بکشید.

فاکتوریال ها در دنیای واقعی نیز کاربرد پیدا کرده اند. در فیزیک کوانتومی، فاکتوریل ها در محاسبه حالات کوانتومی کمک می کنند. در زیست شناسی، فاکتوریل برای درک ترکیبات و تغییرات ژنتیکی استفاده می شود. علاوه بر این، در الگوریتم های کامپیوتری،

1 -Aigner, M.

2 -Stewart, J

3- Silverman, J.H

فاکتوریل‌ها در مرتب‌سازی تکنیک‌ها و ساختار داده‌ها نقش دارند (سج ویک، آر و وین، ک<sup>۱</sup>، ۲۰۱۱).

تاریخ غنی ریاضیات ایران، به ویژه در دوران طلایی اسلامی، سهمی دارد که به طور غیرمستقیم راه را برای درک فاکتوریل‌ها هموار کرد. در حالی که کارهای مستقیم روی فاکتوریل‌های این دوره ممکن است محدود باشد، مشارکت‌های گسترده در جبر، حساب و ترکیب‌شناسی سنگ‌های اساسی را گذاشت. مربیان و ریاضیدانان معاصر ایرانی به کاوش و آموزش این مفاهیم ادامه می‌دهند و آنها را با بافت تاریخی در هم می‌آمیزند.

در نتیجه، فاکتوریل‌ها، علیرغم اینکه مفهومی به ظاهر ساده هستند، دنیایی پر از سرگرمی، چالش‌ها و درک عمیق ریاضی را باز می‌کنند. از چیدمان اشیا تا درک پیچیدگی‌های توابع در حساب دیفرانسیل و انتگرال، فاکتوریل‌ها نقش اساسی دارند. برای مربیان، دانش آموزان و محققان به طور یکسان، غواصی عمیق در دنیای فاکتوریل‌ها نوید روشنگری و سرگرمی را می‌دهد.

## ۱.۵ الگوهای اعداد و پیش‌بینی‌ها

اعداد فقط نمایش کمیت نیستند. در طول قرن‌ها، اعداد خود را نشان داده‌اند که الگوها، توالی‌ها و روابط زیبایی را در خود جای داده‌اند. توانایی تشخیص این الگوها و پیش‌بینی بر اساس آن‌ها جزء جدایی‌ناپذیر درک ریاضی و کاربردهای آن است.

یکی از ابتدایی‌ترین و اساسی‌ترین الگوهای اعدادی که بشریت به رسمیت شناخته است، پیشروی حسابی است، دنباله‌ای از اعداد که در آن تفاوت بین هر دو عضو متوالی ثابت است. به عنوان مثال، سری ۲، ۴، ۶، ۸ و غیره با اختلاف مشترک ۲ پیشرفت می‌کنند. شناخت چنین پیشرفت‌هایی به تمدن‌های باستانی امکان پیش‌بینی اصطلاحات آینده، ابداع تقویم و درک پدیده‌های نجومی را می‌داد.

پیشروی های هندسی، که در آن هر عبارت بعد از اولین عبارت با ضرب قبلی در یک عدد ثابت غیر صفر پیدا می شود، الگوی پایه دیگری است. نمونه هایی مانند الگوهای رشد جمعیت و محاسبات سود مالی اغلب از پیشرفت های هندسی پیروی می کنند.

دنباله فیبوناچی الگوی جذاب دیگری است که در آن هر عدد حاصل جمع دو عدد قبلی است: ۰، ۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸ و غیره. این دنباله فقط یک کنجکاوی ریاضی نیست. در پدیده های مختلف طبیعی، از آرایش برگ ها بر روی یک گیاه گرفته تا ساختار مارپیچی کهکشان ها ظاهر می شود.

پیش بینی های مبتنی بر الگوهای اعداد در زمینه های مختلف کاربرد پیدا کرده است. در زیست شناسی، درک الگوهایی که در آن ژن های خاص ظاهر می شوند، به پیش بینی احتمال برخی بیماری های ارثی کمک کرده است. در علم اقتصاد، شناخت الگوها در رفتارهای گذشته بازار می تواند بینش هایی را در مورد حرکات بازار آینده ارائه دهد، هرچند با درجات مختلف دقت.

مطالعه اعداد اول، همانطور که قبلا بحث شد، نشان می دهد که چگونه اعداد به ظاهر تصادفی می توانند الگوهایی داشته باشند. غیرقابل پیش بینی بودن اعداد اول و تلاش برای رمزگشایی الگوهای آنها منجر به تدوین حدس ها و نظریه های مختلف شد.

الگوها همیشه ساده نیستند. به عنوان مثال، حدس کولاتز با هر عدد صحیح مثبت شروع می شود. اگر زوج باشد آن را نصف می کنید و اگر فرد باشد آن را سه برابر کرده و یک عدد اضافه می کنید. علیرغم ماهیت به ظاهر آشفته این فرآیند، دنباله همیشه بدون توجه به عدد شروع به عدد ۱ می رسد. این الگو علیرغم سادگی، اثبات نشده باقی مانده و نمونه ای از چالش ها و رازهایی است که هنوز در دنیای اعداد وجود دارد.

در دوران مدرن، حوزه تجزیه و تحلیل داده ها به شدت بر شناخت الگوها در مجموعه داده های وسیع متکی است. الگوریتم های یادگیری ماشینی داده ها را غربال می کنند تا الگوها را بیابند و بر اساس آنها پیش بینی کنند. خواه پیش بینی روند بازار سهام،